初等物理數學 2012 修訂版

國立中興大學物理系教授 林中一編撰

Chap. 1 Ordinary Differential Equations and Its Applications to Physical Systems

一個方程式包含了一個未知函數 y(x)及其導函數，就是一個「常微分方程式」 (ordinary differential equation, ODE)。出現在方程式中最高次微分的數目稱爲該方程式的「階數(order)」,所以一個 n 階 ODE 的一般形式爲

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{[n]}) = 0$$

其中 F 爲一個 n+1 變數的任意函數。例如

1. $x^2 y''(x) - 3x(y'(x))^5 + 4y(x) = \sin(x)$ 爲 2 階 ODE,
2. $y'(x) = 3x^2 - 4x + 5$ 爲 1 階 ODE，
3. $g'(x) + 2[g(x)]^2 = x^8 - 1$ 亦爲 1 階 ODE，
4. $y'''(x) = 16e^{-2x}$, 爲 3 階 ODE。

二階 ODE 是物理裡最重要的 ODE 因爲牛頓第二運動定律 F=ma 即是二階 ODE。有別於 ODE，我們也會遇到所謂的「偏微分方程式(partial differential equation, PDE)」是含有偏微分項的方程式。例如

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t)$$

PDE 的問題留待大二的物理數學再討論。

什麼是一個 n 階 ODE 的解呢？一個 n 階 ODE 的解就是「**任何一個**在某個 interval 內，至少其 n 階導函數存在，且可滿足該方程式的函數」。例如 y'-2y = 6 的一個解爲 y(x) = exp(2x)-3, for all x,
因爲其 1 階導函數對 all x 都存在，且將之代入原式得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}[\exp(2x) - 3] - 2[\exp(2x) - 3] \\ &= 2\exp(2x) - 2\exp(2x) + 6 = 6\end{aligned}$$

要注意的是，如果不需滿足特定的條件，一個 ODE 的解不只一個。

一個 ODE「所有的解」所形成的集合稱爲該 ODE 的「通解(general solution)」。如果通解裡所有的未定常數都被決定的話，該解稱爲原 ODE 的一個「特解(particular solution)」，通解裡的未定常數可由所謂的「初始條件」定出（見後面的「等速運動」）

例如 $y'(x) = 3x^2 - 4x$ 的通解爲

$y(x) = x^3 - 2x + C$, 其中 C 是一個任意常數。

完整解出一個 ODE 就是將他的「通解」找出來。一般來說 n 階 ODE 必包含 n 個任意常數。

例如 解 $y''(x) = 12x + 8$，先將原式兩邊對 x 積分得

$$\int \frac{d^2y}{dx^2}dx =$$
$$\frac{dy}{dx} = \int (12x+8)dx = 6x^2 + 8x + C_1$$

上式兩邊再對 x 積分得

$$\int \frac{dy}{dx}dx = \int dy,$$
$$\Rightarrow y(x) = \int (6x^2 + 8x + C_1)dx = 2x^3 + 4x^2 + C_1x + C_2$$

不過這個例題是特別簡單的，通常的 ODE 沒這麼好解，是不能靠單純的積分就可以解出的。

§ 1 階可分離(separable) ODE： $\frac{dy(x)}{dx} = p(x)q(y)$

這種特殊形式的 ODE 稱爲 separable 就是因爲可以將 y 的項與 x 的項分開列在等號的兩邊 such that

$$\frac{dy(x)}{dx} = p(x)q(y)$$
$$\Rightarrow \frac{dy(x)}{q(y)} = p(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{q(y)} = \int p(x)dx$$

上式只要兩端的積分可以做出就可得到一個 y(x)的代數方程式，再將 y(x)解出即可。形式簡單但「不可分離」的 ODE 很多，例如 $\frac{dy}{dx}=x+y$ 就不可分離。以下的例子都是 separable 的 case.

Ex. $$\frac{dy}{dx}=\frac{(2x+1)}{\sin(y)}\Rightarrow \sin(y)dy=(2x+1)dx\Rightarrow\int\sin(y)dy=\int(2x+1)dx$$
$$-\cos(y)=x^2+x+C\Rightarrow y=\cos^{-1}(-x^2-x+C)$$

＊ 一維等加速運動

令 x(t)爲位置，由加速度的定義得等加速運動

$$\frac{d^2x}{dt^2}=a=\text{constant} \qquad (1\text{-}1)$$

i) 推導瞬時速度 $v(t) = v_0 + a\,t$。 由（1-1）

$$\begin{aligned}&\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}(\frac{d}{dt}x)=\frac{d}{dt}v=a\\&\Rightarrow dv=adt\\&\Rightarrow\int dv=\int adt=a\int dt\\&\Rightarrow v(t)=at+C\end{aligned} \qquad (1\text{-}2)$$

得到「通解」。令「初始條件」爲 $v(0)=v_0$，代入（1-2）可定出 $C=v_0$，所以可導出

$$v(\text{t}) = v_0 + a\,t \qquad (1\text{-}3)$$

其實，（1-2）式中的未定常數 C 也可以由「在積分時訂出積分上、下限」得到。因爲在已知「初始條件」爲 $v(0)=v_0$ ，（1-2）中的積分就可以「對應的」標上積分上、下限：

$$\begin{aligned}&\int_{v_0}^{v(t)}dv=\int_0^t adt\Rightarrow v(t)-v_0=at\\&\Rightarrow v(t)=v_0+at\end{aligned}$$

上式的積分不再有未定常數因爲是「定積分」。所以「初始條件」的使用是可以在積分時直接在積分上、下限用上，如此可省卻去解未定常數所花的功夫。

ii) 推導位移 $\Delta x = x(t) - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ 。

（1-3）兩端對 t 積分，若初始條件為 $x(t)=x_0$, 則

$$
\begin{aligned}
& v(t) = \frac{d}{dt}x = v_0 + at \\
& \Rightarrow dx = (v_0 + at)dt \\
& \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^v (v_0 + at)dt \\
& \Rightarrow x(t) - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2.
\end{aligned}
\qquad (1\text{-}4)
$$

ii) 推導 $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$

$$
\begin{aligned}
& \frac{d^2x}{dt^2} = a \Rightarrow \frac{dv}{dt} = a \\
& \Rightarrow \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = a \\
& \Rightarrow v\frac{dv}{dx} = a \Rightarrow vdv = adx \\
& \Rightarrow \int_{v_0}^{v} vdv = \int_{x_0}^{x} adx \Rightarrow \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = a(x - x_0) \\
& \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0).
\end{aligned}
\qquad (1\text{-}5)
$$

（1-6）中我們用 chain rule $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}$ ，若令初始位置 $x_0 = 0$,可得 $v^2 = v_0^2 + 2ax$ 。

＊ 考慮空氣阻力的問題

ex. 1 若有一質量 m 的車子在水平面以等速 v_0 移動時忽然熄火，之後在空氣阻力 $\vec{F} = -b\vec{v}$, b>0 的作用之下滑行，若令熄火的時刻為 t = 0,(a) 試求熄火後的速 v(t), 車子停止前滑行若干時間？(b)車子停止前滑行距離多少？

解：(a) 本題的受力非定力所以「不是等加速運動」！要注意此處空氣阻力中的「負號」表示阻力始終與速度反向。由牛頓第二定律，令 $\hat{i}$ 為＋x 方向單位向量

$$
\begin{aligned}
&\vec{F} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -b\vec{v} \\
&\Rightarrow m\frac{d^2x\hat{i}}{dt^2} = -bv\hat{i} \\
&\Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -bv \\
&\Rightarrow m\frac{dv}{dt} = -bv \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{-b}{m}dt \\
&\Rightarrow \int_{v_0}^{v(t)}\frac{dv}{v} = \int_0^t \frac{-b}{m}dt \Rightarrow \ln v\Big|_{v_0}^{v(t)} = \frac{-b}{m}t \\
&\Rightarrow \ln\left(\frac{v(t)}{v_0}\right) = \frac{-b}{m}t \\
&\Rightarrow v(t) = v_0\exp\left(\frac{-b}{m}t\right)
\end{aligned}
$$

可以看到在與速度一次方成比例且反向的阻力之下，速度是隨時間以「指數衰減」方式減速，由於 exp 函數永遠不爲零所以需時無窮久才停得下來（因爲速度越慢時阻力也越小）。注意，可以分析 *b/m* 的因次爲「時間分之一」(你要自己 check 一下,不然就請來上課！)，所以常將這個量定義爲 $\frac{b}{m} \equiv \frac{1}{\tau}$ ，此處的常數 τ 具有時間的單位。所以可將結果表爲

$$v(t) = v_0\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \qquad (1\text{-}5a)$$

由於 τ 是由系統的常數訂出，所以稱 τ 爲本系統的「特徵時間 (characteristic time)」，視爲本系統「時間的標準」。即，所謂「短時間」*t* 表示 $t \ll \tau$ ，而所謂「長時間」*t* 表示 $t \gg \tau$ 。往後我們都會看到處理的系統中有許多特有的常數，而這些常數可以湊出具有長度單位或能量單位等等的量，那麼這些量就成爲該系統的「特徵長度 characteristic length」、「特徵能量 characteristic energy」…等，作爲對應物理量的標準。本題還可以湊出些什麼「特徵量」？mv_0 是不是本系統的「特徵動量」？那麼「特徵長度」…etc. 呢？請來上課！

τ 還有另一層重要的物理意義：就是阻力開始有顯著效力的時間尺度。亦即作用時間 $t \approx \tau$ 時阻力的效果就不能在忽略了，由上式看到當時間 $t \sim \tau$ 時速度就因阻力而衰減至初速度的 $1/e = 0.368$ 倍，這是絕對不能忽略的影響。我們可以從他的定義來看

$$\tau \equiv \frac{m}{b}$$

由於 b 表現的是阻力的強度，所以對固定的質量 m，若 b 值越大（阻力越強），在越短的時間阻力就會有明顯的效果。反之，b 值越小（無阻力表 $b \to 0 \Rightarrow \tau \to \infty$ ）就要等很久才看得出效果。質量 m 也扮演重要的角色，因爲當固定 b 時質量大的物體因慣性較大，所以阻力要作用比較久才能顯著的影響運動的狀態。

(b) 我們可以方便的令初始位置 $x(0)=0$

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = v(t) = v_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \Rightarrow dx = v_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) dt \\
&\Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t v_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) dt \\
&\Rightarrow x(t) = v_0 \tau \left[1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right]
\end{aligned}$$

可以看到以 $t = 0$ 代入，即可還原初始條件 $x(0)=0$，但是當 $t \to \infty$ 時

$$x(\infty) = v_0 \tau = \frac{m v_0}{b}$$

這是個有限值！我們如何想像一個一直在移動的物體走了無窮久居然不能走無窮遠？這是因爲雖然車子仍在移動但是「指數衰減」使得速度很快的就降到接近 0 的速度，亦即大部分的時間車子都是以趨近於 0 的速度在移動，所以當然可能走不了多遠的。

<u>娛樂一下</u>：若阻力爲 $F = -\beta v^2$ 如何？注意 β 的單位不同於 b.

ex. 3 考慮空氣阻力的自由落體運動

一質量 m 的物體自靜止自由落下，若有空氣阻力 $\vec{F} = -b\vec{v}$, $b>0$ 的作用求速度隨時間的函數，需時多久才能達到終端速度？

解：令向下爲＋y，令 $\hat{j}$ 爲+y 方向單位向量，$\frac{b}{m} \equiv \frac{1}{\tau}$

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{y}}{dt^2} = -b\vec{v} + m\vec{g} \Rightarrow m\frac{d^2 y\hat{j}}{dt^2} = -bv\hat{j} + mg\hat{j}$$

$$\Rightarrow m\frac{d^2 y}{dt^2} = -bv + mg$$

當達到終端速度 v_T 時受力爲零，所以 $v_T = \frac{mg}{b} = g\tau$ 。

$$m\frac{d^2 y}{dt^2} = -bv + mg$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{v}{\tau} + g$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{v}{\tau} + g \Rightarrow \frac{dv}{\frac{-v}{\tau} + g} = dt \Rightarrow \int_0^{v(t)} \frac{dv}{\frac{-v}{\tau} + g} = \int_0^t dt$$

令 $u = \frac{-v}{\tau} + g \Rightarrow du = \frac{-dv}{\tau}$ 帶入上式得

$$\int_g^{\frac{-v}{\tau}+g} \frac{-\tau du}{u} = t \Rightarrow \ln\left(\frac{g - \frac{v}{\tau}}{g}\right) = \frac{-t}{\tau}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{v}{g\tau} = \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \Rightarrow v = g\tau\left[1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right] = v_T\left[1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right]$$

可以看出要當 $t \to \infty$ 時 v 才會等於 v_T,所以看來如果空氣阻力只與速度一次方有關時終端速度只是個「理想目標」是永遠達不到的！但是我們也不必如此悲觀，因爲只要當 $t = 5\tau$ 時，exp(-5) = 6.74×10^{-3}, i.e.,

$$v(5\tau) = v_T(1 - 6.74\times10^{-3}) \approx 0.993 v_T \quad 而$$

$$v(10\tau) = 0.999955 v_T$$

基本上已經在測量誤差之內，所以由測量的觀點來看，終端速度很快就能達到只是要看系統的「特徵時間」τ 有多長而已。

我們也可以看一看自由落下「很短」的時間內的行爲。如前面討論過的「很短」的時間 t 表示 $\frac{t}{\tau} << 1$，所以 $\exp(\frac{-t}{\tau}) = 1 - \frac{t}{\tau} + \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 - \cdots \approx 1 - \frac{t}{\tau}$，thus

$$v(t << \tau) = g\tau\left[1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right] \approx g\tau\left[1 - \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)\right] = g\tau\frac{t}{\tau} = gt$$

這與無阻力的自由落體相同。這可以理解，因爲阻力隨著速度增大而增加，所以在落下的最初因爲速度還很小所以阻力也非常小，以致像是個單純的自由落體。

<u>娛樂一下</u>：算出位置 y(t)並討論「短時間」行爲 $y(t << \tau)$.

§ 線性 ODE

一個 n 階 ODE， F(x, y, y',…, $y^{[n]}$)=0，若方程式裡所有 $y^{[n]}$的項最多只有一次式，就稱爲所謂 n 階「線性」ODE (n^th order linear ODE)。線性 ODE 必爲以下形式：

$$a_n(x)y^{[n]} + a_{n-1}(x)y^{[n-1]} + ... + a_1(x)y' + a_0 y + q(x) = 0$$

換言之，像 y" + yy'- x =0 或 y''' + 3x y" – y^2 -3 = 0 就都不是線性 ODE。

＊1 階線性 ODE 的一般形式爲

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

上式中若 $q(x)$＝0 則稱爲「齊次(homogeneous)」線性 ODE，若 $q(x) \neq 0$ 則稱爲「非齊次（nonhomogeneous）」ODE。不論齊次與否 1 階線性 ODE 必定有解。

1 階齊次線性 ODE 必是 separable:

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx$$
$$\Rightarrow \ln(y) = -\int p(x)dx + C$$
$$\Rightarrow y(x) = e^{-\int p(x)dx + C} = C\exp\left(-\int p(x)dx\right)$$

但是，1 階非齊次線性 ODE 就不是 separable 了，相關的細節留到大二物理數學討論。

§ 2 階線性 ODE

2 階線性 ODE 的標準形式爲

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0 y(x) = g(x)$$

若 $g(x)=0$ 稱爲「齊次」ODE，$g(x) \neq 0$ 則爲「非齊次」ODE。在這裡我們將只討論「**常係數**」2 階線性 ODE：

$$y''(x) + by'(x) + cy(x) = g(x) \text{ ， } b, c \text{ 爲常數。} \qquad (1\text{-}11)$$

（A） 齊次線性 ODE

$$y''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \qquad (1\text{-}12)$$

定理 若 y = u(x) 與 y = v(x) 皆爲（1-12）式之解，則線性組合

$$y = c_1 u(x) + c_2 v(x) \text{ ， } c_1, c_2 \text{ 爲常數}$$

也必是（1-12）的解。

Pf. 因爲 u(x)、v(x)皆爲解所以代入（1-12）

$$u''(x) + bu'(x) + cu(x) = 0 \qquad (a1)$$
$$v''(x) + bv'(x) + cv(x) = 0 \qquad (a2)$$

$(a1)\times c_1 + (a2)\times c_2$ 得

$$\frac{d^2}{dx^2}(c_1u + c_2v) + b\frac{d}{dx}(c_1u + c_2v) + c(c_1u + c_2v) = 0$$

表示 $y = c_1u(x) + c_2v(x)$ 亦滿足（1-12）式，所以爲解。

例如 ODE　y” = y，可證明 y = exp(x) 與 y = exp(-x) 皆爲解，所以

$y = c_1 \exp(x) + c_2 \exp(-x)$ 亦爲一解。

＊ $y''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ （1-12）求解

我們可以觀察，要滿足（1-12）式的函數必須是其 2 次微分、一次微分、與其自己都具有「相同的長相」，這樣才有可能加起來後等於 0！那麼看來好像只有「指數函數 exp」才有機會，所以我們可以假設（1-12）式的解爲 $y(x) = \exp(nx)$　　n 爲某一常數

將上式代入（1-12）得

$$
\begin{aligned}
& n^2 \exp(nx) + nb\exp(nx) + c\exp(nx) = 0 \\
& \Rightarrow \left(n^2 + nb + c\right)\exp(nx) = 0\big) \\
& \Rightarrow n^2 + nb + c = 0 \qquad\qquad (1-13)
\end{aligned}
$$

（1-13）式稱爲原 ODE（1-12）的「特徵方程式（characteristic equation）」或「輔助方程式（auxiliary equation）」。（1-13）解出

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \qquad （1-14）$$

case 1.　$b^2 - 4c > 0$, 表示特徵方程式（1-13）式有 2 個不同的實數根，n_1 與 n_2 (分別對應（1-14）中的「＋」號與「—」號。

$$y(x) = c_1 \exp(n_1 x) + c_2 \exp(n_2 x)$$

即爲（1-12）「通解」（因爲包含 2 個未定常數）。

Case 2.　$b^2 - 4c = 0$, 表示特徵方程式（1-13）式有實數重根 n = -b/2，所以只得一個解 $y(x) = \exp(-bx/2)$，那麼要怎麼找第二個解以組成通解？我們可以很直接的證明 $y(x) = x\exp(\frac{-b}{2}x)$ 也是一個解,代回（1-12）

$$
\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dx^2}(x\exp(-bx/2)) + b\frac{d}{dx}(x\exp(-bx/2)) + cx\exp(-bx/2) \\
& = \left(\frac{-b}{2}\right)^2 xe^{(-bx/2)} + 2\left(\frac{-b}{2}\right)e^{(-bx/2)} + b\left[\frac{-b}{2}xe^{(-bx/2)} + e^{(-bx/2)}\right] + cxe^{(-bx/2)} \\
& = \left\{\left(\frac{-b}{2}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2}\right) + c\right\}xe^{(-bx/2)} + \left[2\frac{-b}{2} + b\right]e^{(-bx/2)} = 0
\end{aligned}
$$

所以通解爲

$$y(x) = c_1 \exp(\frac{-b}{2}x) + c_2 x \exp(\frac{-b}{2}x)$$

第二個解基本上是憑經驗找到的。

Case 3.　$b^2 - 4c < 0$,（1-13）有 2 個不同的複根，對應±號寫爲$\alpha \pm i\beta$，其中

$$\begin{aligned}
&\alpha = \frac{-b}{2},\ i\beta = \frac{\sqrt{b^2-4c}}{2} \\
&y(x) = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x},\ or, \\
&y(x) = e^{\alpha x}\left(c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x}\right),\ or, \\
&y(x) = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x\right),\ or, \\
&y(x) = Ae^{\alpha x}\cos(\beta x + \phi).
\end{aligned}$$

ex. 1 solve y” – y’ – 6y =0

sol. 可得特徵方程式 $n^2 - n - 6 = 0 \ \Rightarrow n_1 = 3,\ n_2 = -2.$ 所以

$$y(x) = c_1 \exp(3x) + c_2 \exp(-2x).$$

ex. 2 solve　$y'' + 2\sqrt{3}y' + 3y = 0 \Rightarrow$ 特徵方程式 $n^2 + 2\sqrt{3}n + 3 = 0$ 解出

$$n = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{12-12}}{2} = -\sqrt{3}$$ 重根，所以

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)\exp(-\sqrt{3}x).$$

ex. 3 solve y’’ – 6y’ +13y = 0,特徵方程式 $n^2 - 6n + 13 = 0$

$$\begin{aligned}
&n = \frac{6 \pm \sqrt{36-52}}{2} = 3 \pm 2i \\
&\Rightarrow \alpha = 3,\ \beta = 2. \\
&\Rightarrow y(x) = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x).
\end{aligned}$$

ex. 4 簡諧振子 simple harmonic oscillator

考慮一質量 m 的質點繫於一彈力常數 k > 0 的彈簧在光滑水平面上做直線運動。求位置 x(t)。

解　列出運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx\Rightarrow\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0\Rightarrow\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$

其中角頻率 $\omega\equiv\sqrt{\frac{k}{m}}$。所以特徵方程式爲

$$\begin{aligned}&n^2+\omega^2=0\Rightarrow n=\pm i\omega\\&x(t)=c_1\exp(i\omega t)+c_2\exp(-i\omega t),\ or\\&x(t)=A\cos(\omega t+\varphi).\end{aligned}$$

最後的解裡包含了 2 個未定常數 A 與 φ 必須由初始條件定之。令初始條件爲

$$x(0)=x_0,\ v(0)=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0\quad\text{可得}$$

$$\begin{cases}x(0)=x_0=A\cos\varphi,\\ v(0)=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=-A\omega\sin\varphi=0\end{cases}$$

由於 A 與 ω 皆不能是 0 所以 $\sin\varphi=0\Rightarrow\varphi=0$，也就定出 $A=x_0$, 得

$$\begin{aligned}&x(t)=x_0\cos(\omega t)\Rightarrow v(t)=\frac{dx}{dt}=-\omega x_0\sin(\omega t)\\&\Rightarrow a(t)=\frac{dv}{dt}=-\omega^2x_0\cos(\omega t)=-\omega^2x(t).\end{aligned}$$

以上的討論其實牽涉到一個很重要但是我們並還沒有真的說清楚的事，就是在解 2 階 ODE 的「通解」時我們以需要 2 個未定常數做爲「通解」的「標準」。但事實上這「2 個未定常數」只是表面的形象，我們需要的是 2 個「線性獨立」解的線性組合來表示「通解」。以下就「線性獨立」函數來說明。

定義 1. 一個 m 個函數的集合 {$f_i(x)$, i= 1..m} 裡的函數稱爲在某個 interval I 內爲「線性相依 linear dependent」，如果存在不全爲 0 的係數 c_i 使得 $\sum_{i=1}^{m} c_i f_i(x) = 0$, for all $x \in I$.換言之，那些「線性相依」的函數間必定可以用某幾個函數的線性組合來表示另一個函數；所以稱爲「相依」。

定義 2. 一個 m 個函數的集合 {$f_i(x)$, i= 1..m}裡的函數如果在某個 interval I 內「不是線性相依」，就稱爲爲「線性獨立 linear independent」。換言之，如果 $\sum_{i=1}^{m} c_i f_i(x) = 0$ for all $x \in I$ ，那麼唯一的選擇是「所有的 $c_i = 0$」.

例如 f(x) = $3x^2$, g(x) = x 是「線性獨立」在 $x \in (-\infty, \infty)$ 。因爲如果令

$$c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} c_1 3x^2 + c_2 x = 0, \ and \\ 對x微分 \Rightarrow c_1 6x + c_2 = 0 \end{cases} \quad for \ x \in (-\infty, \infty)$$

對 any $x \neq 0, \ say, x = 1$ 代回上面聯立方程式得

$\begin{cases} 3c_1 + c_2 = 0 \\ 6c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$ 是唯一的解，所以 f(x)、g(x)線性獨立！

定義 3. Wroskian (紀念波蘭哲學家,數學,物理學家,律師,...H. Wronski, 1778-1853)

若一個 m 個函數的集合 {$f_i(x)$, i= 1..m, $x \in I$ }，all $f_i(x)$都至少 m-1 次可微分，則定義 Wronskian of {$f_{i=1..m}$}爲

$$\det\begin{bmatrix} f_1 \quad f_2 \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ f_m \\ f_1' \quad f'_2 \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ f'_m \\ \cdot\cdots\cdots \\ \cdot\cdots\cdots \\ f_1^{[m-1]} \quad f_2^{[m-1]} \ \cdots\cdots \ f_m^{[m-1]} \end{bmatrix} \equiv W(x; f_1, \ldots f_m), \ or = W(x).$$

定理 1. If $\{f_i(x), i=1..m, \ x\in I\}$爲「線性相依」then W(x ;$f_1,....f_m$)=0 for 所有$x\in I$. Or, if 即使有「一個」$x\in I$使得 W(x ;$f_1,....f_m$)$\neq 0$,then $\{f_{i=1..m}\}$「線性獨立」

Pf. If $\{f_i(x), i=1..m, \ x\in I\}$爲「線性相依」，則對所有$x\in I$將係數

$$c_1f_1 + c_2f_2 + c_3f_3 + \dots\dots + c_mf_m = 0 \ \Rightarrow c_1, c_2, c_3, \dots\dots, c_m \text{ 不全爲 } 0$$

將上式及上式對 x 做一次微分，二次微分，....，m-1 次微分可得共 m 個連立方程式

$$c_1f_1 + c_2f_2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + c_mf_m = 0$$
$$c_1f_1' + c_2f_2' + \dots\dots\ \dots\dots\dots\dots + c_mf_m' = 0$$
$$\cdot$$
$$c_1f_1^{[m-1]} + c_2f_2^{[m-1]} + \dots\dots\dots + c_mf_m^{[m-1]} = 0$$

$c_1, c_2, c_3,\dots\dots, c_m$看爲未知數，則要有不全爲 0 的解（trivial solution 自明解）那麼$c_1, c_2, c_3,\dots\dots, c_m$在連立方程式裡的「係數」，即 $f_1, f_2, .., f_m$ 及 f_i 的一階、二階、...到 m-1 階導函數所形成矩陣的行列式必須爲 0，對所有$x\in I$。即得證

$$\det\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & f_m \\ f_1' & f'_2 \ \dots\dots\dots\dots\dots & f'_m \\ \cdot\dots\dots & & \\ \cdot\dots\dots & & \\ f_1^{[m-1]} & f_2^{[m-1]} \ \dots\dots & f_m^{[m-1]} \end{bmatrix} \equiv W(x; f_1,\dots f_m) = 0 \text{ ，對所有 } x\in I$$

要注意，本定理「反之不亦然」！也就是說本定理只說$\{f_{i=1..m}\}$「線性相依」則 W(x)=0，但是「不表示」若 W($x\in I$)=0 則 implies$\{f_{i=1..m}\}$「線性相依」！舉例說明，若

$$f(x) = x^2,\ g(x) = x|x| = \begin{cases} x^2, & x>0 \\ -x^2, & x<0 \end{cases}$$

對 $x > 0$, $W=\begin{vmatrix} x^2 & x^2 \\ 2x & 2x \end{vmatrix}=0$，又對 $x<0$ $W=\begin{vmatrix} x^2 & -x^2 \\ 2x & -2x \end{vmatrix}=0$

但是 x^2 與 x|x| 顯然線性獨立，因為 x^2 無法用 x|x|的倍數表示。或我們可以用嚴格的方法證明：若設 $c_1x^2 + c_2 x |x| = 0$ for all x, 選 x =1 與 -1 分別代入得

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow \text{線性獨立。}$$

所以針對前面「2 階齊次常係數 ODE」解的幾種 case，我們可以舉例

ex. 1. $f_1 = \exp(m_1x)$, $f_2 = \exp(m_2x)$ for all x but $m_1 \neq m_2$

$$W = \begin{vmatrix} \exp(m_1x) & \exp(m_2x) \\ m_1\exp(m_1x) & m_2\exp(m_2x) \end{vmatrix} = (m_2 - m_1)\exp[(m_1+m_2)x] \neq 0$$

所以「線性獨立」。

Ex. 2. $f_1 = \exp(mx)$, $f_2 = x\exp(mx)$ for all x. 由

$$\frac{d}{dx}x\exp(mx) = \exp(mx) + mx\exp(mx) = (1+mx)\exp(mx)$$

$$\Rightarrow W = \begin{vmatrix} \exp(mx) & x\exp(mx) \\ m\exp(mx) & (1+mx)\exp(mx) \end{vmatrix} = (1+mx-mx)\exp(2mx) = \exp(2mx) \neq 0$$

所以「線性獨立」。

Ex. 3. $f_1 = \cos(x)$, $f_2 = \sin(x)$, $f_3 = x$, for all x

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) & x \\ -\sin(x) & \cos(x) & 1 \\ -\cos(x) & -\sin(x) & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\cos(x)[\sin(x) - x\cos(x)] + \sin(x)[\cos(x) + x\sin(x)] \\ &= x\cos^2(x) + x\sin^2(x) \\ &= x \neq 0, \ \ for\ any\ nonzero\ x. \end{aligned}$$

所以{ cos(x), sin(x), x} 為「線性獨立」。

＊ Ex. 5. 阻泥振盪(damped oscillation)

現有一質量 m 的質點繫於一彈力常數 k 的彈簧，在水平面上做直線振盪，然受阻力 $\vec{F} = -b\vec{v}$ 。這樣的系統即為阻泥振盪。運動方程式：

$$
\begin{aligned}
& m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - bv = -kx - b\frac{d}{dt}x \\
& \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \\
& \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0
\end{aligned}
$$

如前$\frac{1}{\tau} \equiv \frac{b}{m},\ \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$爲無阻泥簡諧振盪之自然頻率。上式之輔助方程式

$$
\begin{aligned}
& n^2 + \frac{1}{\tau}n + \omega^2 = 0 \\
& \Rightarrow n = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - 4\omega^2}\right) \Rightarrow n = \frac{1}{2\tau}\left(-1 \pm \sqrt{1 - 4\omega^2\tau^2}\right)
\end{aligned}
$$

ω與τ的值使得 n 有三種可能：

$$
\begin{cases}
1.\ 1 < 4\omega^2\tau^2 : \text{兩個複根，稱爲} under\ \ damped, \\
2.\ 1 = 4\omega^2\tau^2 : \text{重根，稱爲} critical\ \ damped, \\
3.\ 1 > 4\omega^2\tau^2 : \text{兩個實根，稱爲} over\ \ damped
\end{cases}
$$

3 種 case 分開討論：爲了避免太冗長的符號表示，我們考慮一個簡諧振子質量 m = 1 kg, 繫在一條 k = 4 N/m 的彈簧的一端 $\left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\ \ s^{-1}\right)$，在不同阻泥強度 b 的影響之下振盪。並假設 t＝0 時振子靜止於距平衡點 1 m 處然後開始振盪，即 x(0) = 1 and v(0) = 0.

(1) under damped, $1 < 4\omega^2\tau^2$. 選 b = $\frac{1}{2}\ N \cdot s/m \Rightarrow \tau = \frac{m}{b} = 2\ \ s$ ，$4\omega^2\tau^2 = 64$

$$
\begin{aligned}
& n = \frac{1}{2\tau}\left(-1 \pm i\sqrt{4\omega^2\tau^2 - 1}\right) = -\frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{63}}{4} \\
& \Rightarrow x(t) = A\exp\left(\frac{-t}{4}\right)\cos\left[\frac{\sqrt{63}}{4}t + \varphi\right] \\
& \Rightarrow v(t) = -\frac{A}{4}\exp\left(\frac{-t}{4}\right)\left\{\cos\left[\frac{\sqrt{63}}{4}t + \varphi\right] + \sqrt{63}\sin\left[\frac{\sqrt{63}}{4}t + \varphi\right]\right\}
\end{aligned}
$$

其中常數$A,\ \varphi$由初始條件定之。若選 x(0) = 1m 及 v(0) = 0, 即在 t = 0 質點自最大振幅 1m 開始運動，可得

$$\begin{cases} x(0) = A\cos\varphi = 1 \\ v(0) = \dfrac{-A}{4}\left(\cos\varphi + \sqrt{63}\sin\varphi\right) = 0 \end{cases}$$

可解得，由於 $A \neq 0$ 所以

$$\begin{cases} \varphi = \tan^{-1}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{63}}\right) \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{63}}{8},\ \sin\varphi = \dfrac{-1}{8} \\ \Rightarrow A = \dfrac{8}{\sqrt{63}} \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{8}{\sqrt{63}}\exp\left(\frac{-t}{4}\right)\cos\left[\frac{\sqrt{63}}{4}t + \tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{63}}\right)\right] \qquad (1-14a)$$

由上式看出 under damped 振盪時的位置 x(t)爲一個 cos 的振盪項乘上一個指數衰減項，是一個隨著時間持續振盪但是振幅以指數衰減的方式很快會減到幾乎量不到的振盪行爲。做 x-t 圖

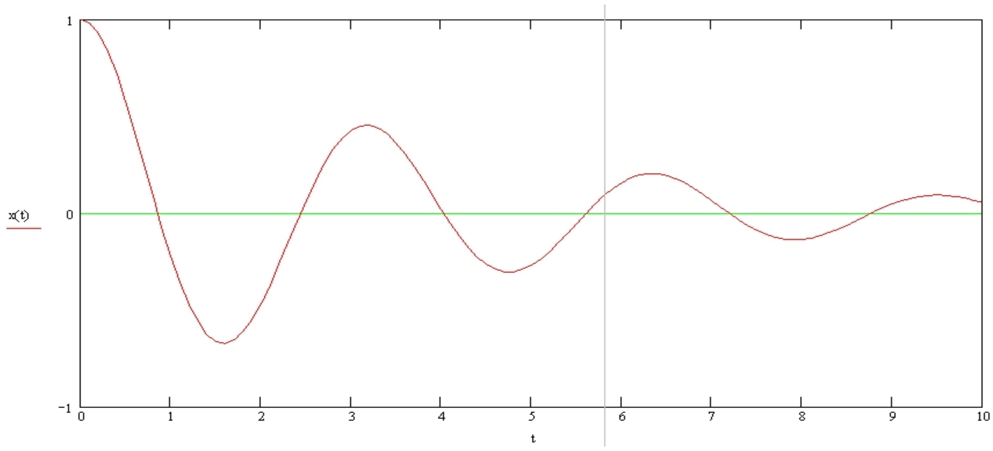


Fig. 1 Under-damped 簡諧振盪 with $\omega = 2s^{-1}$，阻泥係數 b=$\frac{1}{2}$ $N \cdot s/m$ 。

初始條件 x(0) = 1m 及 v(0) = 0

可見振幅隨著時間減小，但是仍可看到「振盪」行爲。由（1-14a）中的 cos 項，可得相鄰兩次通過原點的時間 $T_{1/2}$ 是相同的

$$\left(\frac{\sqrt{63}}{4}\right)T_{1/2} = \pi \Rightarrow T_{1/2} = \frac{4\pi}{\sqrt{63}}$$

但是我們不能說「振盪週期」$T = 2T_{1/2}$ ，因爲振幅的衰減使得 under damped 振盪根本不是週期運動。

(2) critical damped $1=4\omega^2\tau^2$, n 得一重根。自然頻率保持 $\omega=2s^{-1}$,但選阻泥係數 b = $4\,N\cdot s/m \Rightarrow \tau=\dfrac{m}{b}=\dfrac{1}{4}s$

$$
\begin{aligned}
&n=\frac{-1}{2\tau}=-2\\
&\Rightarrow x(t)=A\exp(-2t)+Bt\exp(-2t)=(A+Bt)\exp(-2t)\\
&\Rightarrow v(t)=-[2A+B(2t-1)]\exp(-2t)
\end{aligned}
$$

看得出 critical damped case 因為阻力已經太強，使得「振盪」的行為都消失了。若選相同的初始條件 x(0) = 1m 及 v(0) = 0, 可解出

$$
\left.\begin{aligned}
&x(0)=A=1\\
&v(0)=2A-B=0\Rightarrow B=2
\end{aligned}\right\}\Rightarrow x(t)=(1+2t)\exp(-2t)>0 \qquad (1-14b)
$$

做 x – t 圖

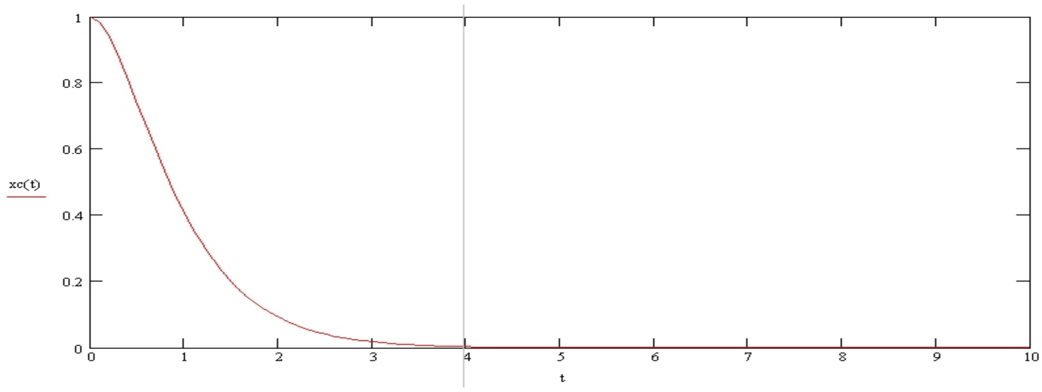


Fig. 2 Critical-damped 簡諧振盪 with $\omega=2s^{-1}$，阻泥係數 b=$4\,N\cdot s/m$ 。

初始條件 x(0) = 1m 及 v(0) = 0.阻力太強，連原點都回不去。

(3) over damped, $1>4\omega^2\tau^2$, n 得 2 實根。自然頻率保持 $\omega=2s^{-1}$,但選阻泥係數 b = $8\,N\cdot s/m \Rightarrow \tau=\dfrac{m}{b}=\dfrac{1}{8}s$, $4\omega^2\tau^2=\dfrac{1}{4}$.

$$
\begin{aligned}
&n=\frac{1}{2\tau}\left(-1\pm\sqrt{1-4\omega^2\tau^2}\right)=4\left(-1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-4\pm2\sqrt{3}<0\\
&\Rightarrow x(t)=A\exp\left[\left(-4+2\sqrt{3}\right)t\right]+B\exp\left[\left(-4-2\sqrt{3}\right)t\right]\\
&\Rightarrow v(t)=A\left(-4+2\sqrt{3}\right)\exp\left[\left(-4+2\sqrt{3}\right)t\right]+B\left(-4-2\sqrt{3}\right)\exp\left[\left(-4-2\sqrt{3}\right)t\right]
\end{aligned}
$$

若選 x(0) = x_0 及 v(0) = 0,可得

$$\begin{cases} x(0) = A + B = 1 \\ v(0) = A\left(-4+2\sqrt{3}\right) + B\left(-4-2\sqrt{3}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}},\ \ B = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\exp\left[(-4+2\sqrt{3})t\right] + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\exp\left[(-4-2\sqrt{3})t\right] \qquad (1-14c)$$

由（1-14c）可看出，over-damped case 一樣沒有振盪現象。做 $x-t$ 圖

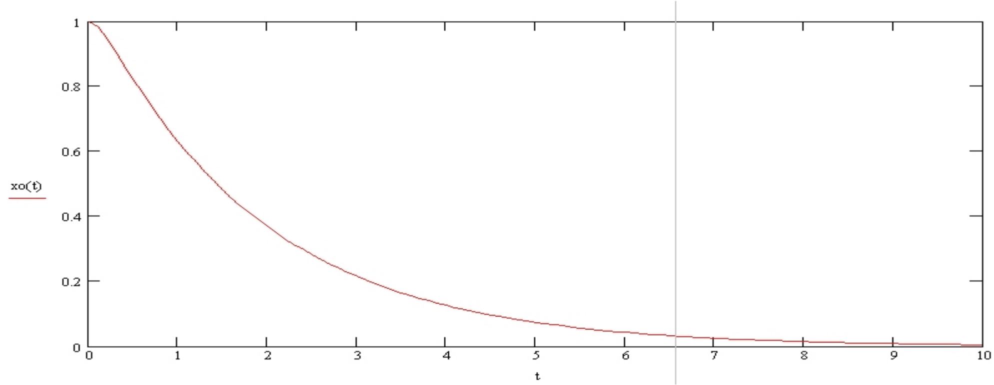


Fig. 3 Over-damped 簡諧振盪 with $\omega = 2s^{-1}$，阻泥係數 b = 8 $N \cdot s/m$ 。初始條件 x(0) = 1m 及 v(0) = 0.阻力比 critical-damped 更強，原點更回不去。

將三種阻泥振盪，相同 $\omega = 2s^{-1}$ 與初始條件 x(0)=1m、v(0)=0,但是阻泥係數分別爲 b=$\frac{1}{2}$ $N \cdot s/m$ ，b = 4 $N \cdot s/m$ 及 b = 8 $N \cdot s/m$ 畫在一起比較（Fig. 4）

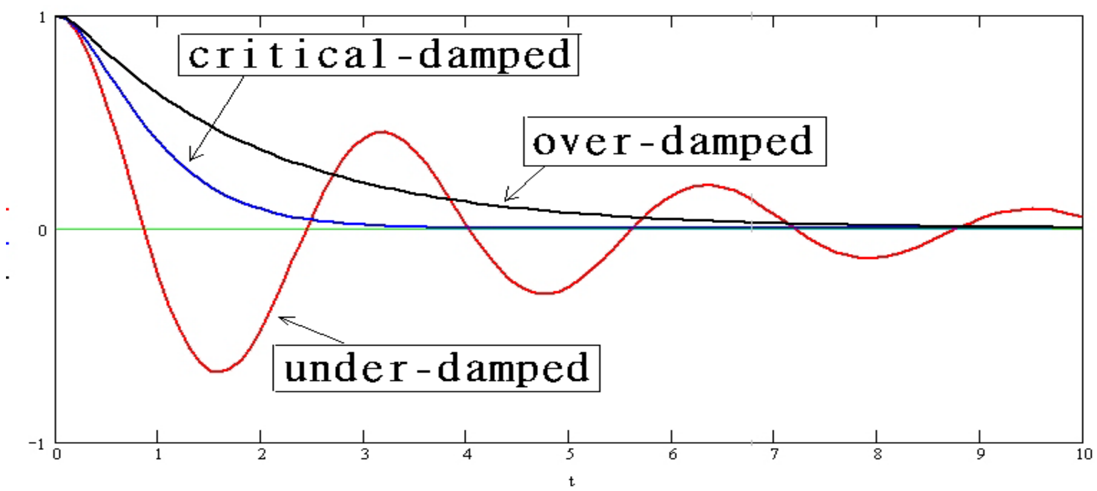


Fig. 4 相同自然頻率、初始條件的三種阻泥振盪的比較。

可以看出和 critical-damped 和 over-damped case 因爲阻泥太強，都連原點都回不去。但 over-damped 的圖線在 critical-damped 之上，i.e.,over-damped 的衰減較慢，這是因爲 over-damped case 的阻力相對較強造

成同一時刻的速度變得較慢（曲線的斜率較小），這也使得 over-damped 的振子逼近原點所需的時間更長。

（B）2 階常係數非齊次線性 ODE

$$y''+by'+cy=g(x)\neq 0,\ b,c \text{ 爲 constants.} \qquad (1\text{-}15)$$

定義： 對應於「非齊次」ODE（1-15）的「齊次」ODE

$$y''+by'+cy=0,\ b,c \text{ 爲 constants.} \qquad (1\text{-}16)$$

稱爲（1-15）的「complementary equation 補充方程式」

定理： 令 $y_1(x)$與 $y_2(x)$爲補充方程式 $y''+by'+cy=0$ 在 interval I 的兩個線性獨立解，又令 $y_p(x)$ 爲「任何一個」滿足非齊次 ODE $y''+by'+cy=g(x)\neq 0$ 的「特解」，則非齊次 ODE $y''+by'+cy=g(x)\neq 0$ 的「通解」爲 $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x)$

pf. 爲了方便我們定義一個「算符 operator」

$$\hat{L}\equiv\frac{d^2}{dx^2}+b\frac{d}{dx}+c,\ \ such\ that$$

$$\hat{L}y=\left(\frac{d^2}{dx^2}+b\frac{d}{dx}+c\right)y=\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy$$

$$\Rightarrow \hat{L}(c_1y_1+c_2y_2+y_p)$$

$$=c_1\left(\frac{d^2y_1}{dx^2}+b\frac{dy_1}{dx}+cy_1\right)+c_2\left(\frac{d^2y_2}{dx^2}+b\frac{dy_2}{dx}+cy_2\right)+\left(\frac{d^2y_p}{dx^2}+b\frac{dy_p}{dx}+cy_p\right)$$

$$=0+0+g(x).\quad q.e.d.$$

所以要得非齊次 ODE 之通解，就先解「齊次部分」的「補充 ODE」的通解，再配合一個非齊次 ODE 的特解即可。解「補充 ODE（齊次）」的通解，是有固定程序的，但是非齊次 ODE 的特解有時要做一些「聰明的猜測」。

Ex. $y''-4y'+4y=9\exp(-x)$

Sol. 先解齊次部分 $y''-4y'+4y=0$ ，由輔助方程式

$$n^2 - 4n + 4 = (n - 2)^2 = 0$$

得重根 n = 2 所以齊次部分的通解為 $y_h = c_1 \exp(2x) + c_2\, x \exp(2x)$.

由 $g(x) = 9\exp(-x)$ 可以猜測 y_p 應該也具有相同的形式，可以證明

$y_p = \exp(-x)$ 就是一個特解：代回原式

$$\frac{d^2}{dx^2}\exp(-x) - 4\frac{d}{dx}\exp(-x) + 4\exp(-x) = 9\exp(-x)$$ 。 得證。

所以原 ODE 的通解為 $y(x) = c_1 \exp(2x) + c_2\, x \exp(2x) + \exp(-x)$.

＊ 特解 y_p 的解法

特解 y_p 的解法大致有兩種，在這裡我們只介紹一種，剩下的你們大二物理數學會教。「未定係數法 method of undetermined coefficient」或「聰明猜測法 method of educated guessing」:按照原 ODE 裡的 $g(x)$ 的長相去猜。

Ex. 1. $y''-4y = 8x^2 - 2x$

Sol. 由於 $g(x)$ 是多項式的形式，而左邊又有 y 的 1 次項，所以猜測

$$y_p = a x^2 + bx + c$$

代回原式

$$\begin{aligned}&\frac{d^2}{dx^2}(ax^2+bx+c) - 4(ax^2+bx+c) = 2a - 4ax^2 - 4bx - 4c\\&= -4ax^2 - 4bx + (2a-4c)\\&= 8x^2 - 2x\end{aligned}$$

比較兩邊係數得方程組

$$\begin{cases}-4a = 8 \Rightarrow a = -2\\ -4b = -2 \Rightarrow b = 1/2\\ 2a + 4c = 0 \Rightarrow c = -1\end{cases}$$

所以得特解 $y_p = -2x^2 + \frac{1}{2}x - 1$。再解齊次部分 $y''-4y = 0$，由輔助方程式

$$n^2 - 4 = (n+2)(n-2) = 0$$

n = 2, or -2, 所以齊次部分的通解為 $c_1 \exp(2x) + c_2 \exp(-2x)$，所以原 ODE 通解為

$$y(x) = c_1 \exp(2x) + c_2 \exp(-2x) - 2x^2 + \frac{1}{2}x - 1.$$

Ex. 2. $y''+2y'-3y = 4\exp(2x)$

解： 先解齊次部分，由 $n^2 + 2n - 3 = 0 \Rightarrow n = 1, -3$，所以齊次部分通解

$$y_h = c_1 \exp(x) + c_2 \exp(-3x)$$

猜 $y_p = k \exp(2x)$ 代入原式得

$$4k\exp(2x) + 4k\exp(2x) - 3k\exp(2x) = 4\exp(2x)$$
$$\Rightarrow 5k = 4 \Rightarrow k = \frac{4}{5}$$

所以原式通解爲

$$y(x) = c_1 \exp(x) + c_2 \exp(-3x) + \frac{4}{5}\exp(2x)$$

這裡要注意的是，我們看到「非齊次右邊的 g(x)」，exp(2x)，沒有與「齊次部分的通解」，exp(x)與 exp(-3x)，重複，這樣 y_p 就可以按照 g(x)的樣子去猜，不然如果重複，表示 g(x)就是「齊次部分」的解，代回去會得到 0，而不是非 0 的 $g(x)$。

Ex. 3. $y''+2y'-3y = 4\exp(x)$

解： 齊次部分：

$$n^2 + 2n - 3 = 0 \Rightarrow n = -3, 1$$
$$\Rightarrow y_h = c_1 \exp(-3x) + c_2 \exp(x)$$

注意，此處「齊次部分」的解與 g(x)重複，所以 y_p 不可以再猜 k exp(x)。依照前面的經驗，我們猜

$$y_p = Ax\exp(x)$$
$$\Rightarrow y_p' = A\exp(x) + Ax\exp(x)$$
$$\Rightarrow y_p'' = 2A\exp(x) + Ax\exp(x)$$

代回原式得 $4A\exp = 4\exp(x) \Rightarrow A = 1 \Rightarrow y_p = x\exp(x).$

ex. 4. $y''-3y'-4y = -4x - 3\cos(2x)$

解： 齊次部分 $\Rightarrow n^2 - 3n - 4 = 0 \Rightarrow n = -1, 4$

$$y_h = c_1 \exp(-x) + c_2 \exp(4x)$$

與 g(x)沒有重複，所以猜 $y_p = ax + b + h\cos(2x) + k\sin(2x)$

此處因爲 cos 的微分得 sin 所以除了 cos 還要加 sin。y_p 代回原式得

$$-4ax - (4b + 3a) + (6h - 8k)\sin(2x) - (8h + 6k)\cos(2x) = -4x - 3\cos(2x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a = -4 \Rightarrow a = 1 \\ 4b + 3a = 0 \Rightarrow b = \dfrac{-3}{4} \\ 6h - 8k = 0 \Rightarrow h = \dfrac{4}{3}k \\ 8h + 6k = 3 \Rightarrow k = \dfrac{9}{50},\ h = \dfrac{6}{25} \\ \Rightarrow y_p = x - \dfrac{3}{4} + \dfrac{6}{25}\cos(2x) + \dfrac{9}{25}\sin(2x). \end{cases}$$

以下表列 g(x)與可能的 y_p

g(x)	y_p
$c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n$	$d_0 + d_1 x + ... + d_n x^n$
$c \exp(ax)$	$d \exp(ax)$
$(c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n)\exp(ax)$	$(d_0 + d_1 x + ... + d_n x^n)\exp(ax)$
$(c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n)\begin{Bmatrix}\sin(bx)\\ \cos(bx)\end{Bmatrix}$	$(d_0 + d_1 x + ... + d_n x^n)\sin(bx) +$ $(e_0 + e_1 x + ... + e_n x^n)\cos(bx)$
$(c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n)\exp(ax)\begin{Bmatrix}\sin(bx)\\ \cos(bx)\end{Bmatrix}$	$(d_0 + d_1 x + ... + d_n x^n)e^{ax}\sin(bx) +$ $(e_0 + e_1 x + ... + e_n x^n)e^{ax}\cos(bx)$

非齊次 ODE 裡如果 g(x)是多項的組合，亦即

$$\hat{L}y = \sum g_i(x) = g_1(x) + g_2(x) + ...$$

則可以考慮單項的 ODE $\hat{L}y = g_i(x)$ 對應特解 y_{p_i} 使得原式的特解爲

$$y_p = \sum y_{p_i},\ \because \hat{L}\sum y_{p_i} = \sum \hat{L}y_{p_i} = \sum g_i(x) = g(x)$$

Ex. 5. $y'' + 9y = -\exp(-4x) + x^2\cos(3x)$

解： 可以看出「齊次部分」的解與 g(x)沒有重複，所以可以照著 g(x)去猜，但是由於 g(x)裡的 exp(-4x) 與 x^2cos(3x) 線性獨立，所以可

以拆爲兩部分

$$\begin{cases} y''+9y=-\exp(-4x) & (1) \\ y''+9y=x^2\cos(3x) & (2) \end{cases}$$

上面（1）、（2）式的特解可分別解出爲

$$\left.\begin{aligned} y_{p1} &= \frac{-1}{25}\exp(-4x) \\ y_{p2} &= \frac{1}{324}(18x^3-3x)\sin(3x)+\left(\frac{1}{36}x^2-\frac{1}{324}\right)\cos(3x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_p = y_{p1}+y_{p2}$$

Check 上述答案的同學，我們有優待！

Ex.6 Forced Oscillation without dissipation 無損耗強迫振盪

考慮一質量 m 之質點繫於一彈力常數 k 之彈簧在光滑水平面上做直線振盪。若有一外力 $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$同時作用，求位置 x(t)。考慮初始條件 x(0) = 0, v(0) = 0.

解：由 N-II $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-kx+F_0\sin(\omega t)$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=\frac{F_0}{m}\sin(\omega t) \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2 x=\frac{F_0}{m}\sin(\omega t) \qquad (1\text{-}17)$$

上式中我們定義彈簧的「自然頻率」爲$\omega_0 \equiv \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ 。

（a） $\omega_0 \neq \omega$

（1-17）齊次部分的解爲 $x_h(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$ ，由於$\omega_0 \neq \omega$ ，所以猜 particular solution 爲 $x_p(t)=a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)$ 代回（1-17）得

$$(-a\omega^2+a\omega_0^2)\cos(\omega t)+(b\omega_0^2-b\omega^2)\sin(\omega t)=\frac{F_0}{m}\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow a(-\omega^2+\omega_0^2)=0 \Rightarrow a=0,\ b=\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}$$

(1-17)通解爲

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow v(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{\omega F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos(\omega t)$$

impose 初始條件：

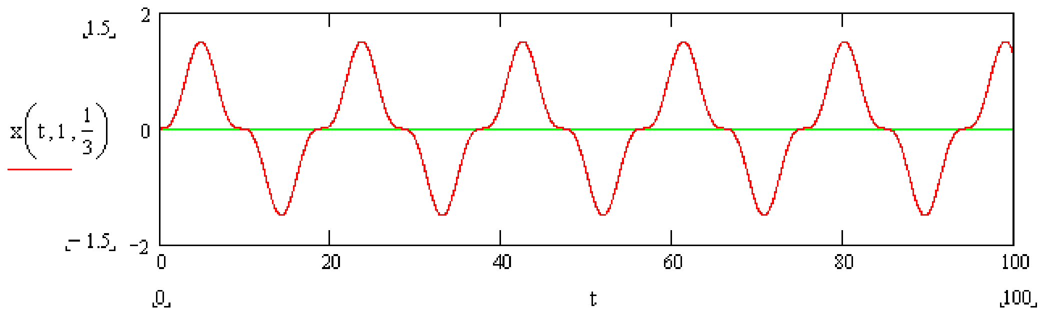
$$\begin{cases} x(0) = A\cos(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2} \\ v(0) = -A\omega_0 \sin(\varphi) + \dfrac{\omega F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = 0 \Rightarrow A = \dfrac{\omega F_0}{m\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)} \end{cases}$$

得

$$x(t) = \frac{\omega F_0}{m\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\sin(\omega t)$$

$$or,\ x(t) = \frac{-\omega F_0}{m\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)}\sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\sin(\omega t)$$

可以看出這個解適用於 $\omega_0 \neq \omega$ 不然就會發散了。令 F_0＝1, m= 1, $\omega_0 = 1, \omega = 1/3$ 做圖



這個結果就是彈簧和一個「不同頻率的」往復外力角力的結果,不同於單純的簡諧運動。

<u>娛樂一下</u>：try 初始條件為 $x(0) = x_0$, $v(0) = 0$.

（b） $\omega_0 = \omega$ ，運動方程式為

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin(\omega_0 t) \qquad （1\text{-}18）$$

上式的齊次方程式解與 case (a)相同 $x_h(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ 但是 particular solution 就不可以相同，因為 g(x)~$\sin\omega_0 t$ 與 $x_h(t)$ 重複，所以必須猜

$$x_p(t) = a\ t\cos(\omega_0 t) + b\ t\sin(\omega_0 t)$$

代回（1-18）得

$$-2a\omega_0\sin(\omega_0 t)+2b\omega_0\cos(\omega_0 t)=\frac{F_0}{m}\sin\omega_0 t$$

$$\Rightarrow b=0,\ a=\frac{-F_0}{2m\omega_0}$$

所以通解

$$x(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi)-\frac{F_0}{2m\omega_0}t\cos(\omega_0 t)$$

，

$$v(t)=-A\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi)-\frac{F_0}{2m\omega_0}[\cos(\omega_0 t)-t\omega_0\sin(\omega_0 t)]$$

impose 初始條件

$$x(0)=A\cos(\varphi)=0\Rightarrow\varphi=\pi/2$$

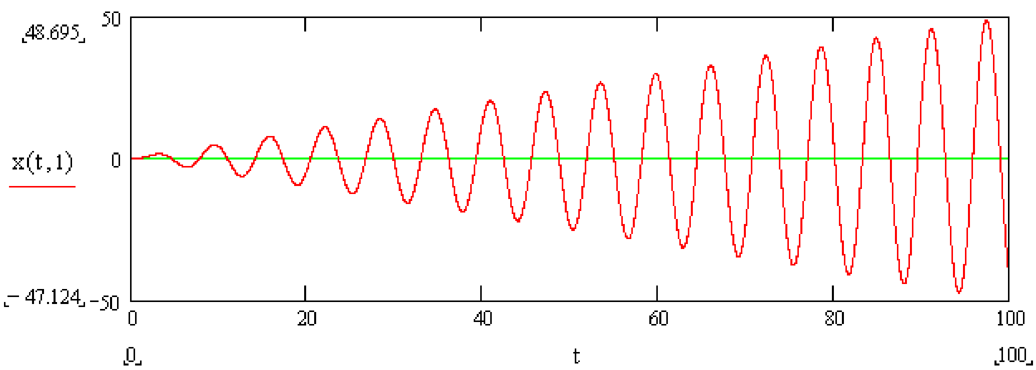
$$v(0)=-A\omega_0\sin(\varphi)-\frac{F_0}{2m\omega_0}=0\Rightarrow A=-\frac{F_0}{2m\omega_0^2}$$

得解

$$x(t)=\frac{F_0}{2m\omega_0^2}\sin(\omega_0 t)-\frac{F_0}{2m\omega_0}t\cos(\omega_0 t)$$

$$or,\ x(t)=\frac{F_0}{2m\omega_0^2}\left(\sin(\omega_0 t)-t\cos(\omega_0 t)\right)$$

令 F_0＝1, m =1, ω_0= 1做圖



x(t)的振幅隨時間越來越大，終至發散，這是因爲其中有一個 t 的一次方，這個現象稱爲「共振 resonance」(想一想盪鞦韆，還有軍隊過橋時爲何不可以齊步走？)

Ex.7 Forced Oscillation with dissipation 有損耗強迫振盪

考慮一質量 m 的質點繫於一彈力常數 k 的彈簧，受阻力 $\vec{F}=-b\vec{v}$ 在水平面上做直線 under damped 振盪。若又受外力 F(t) = $F_0\sin(\omega t)$同時作用，求 x(t)。運動方程式：

$$
\begin{aligned}
& m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-bv+F_0\sin(\omega t) \\
& \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=\frac{F_0}{m}\sin(\omega t)
\end{aligned}
\qquad (1\text{-}19)
$$

如前 $\frac{1}{\tau}\equiv\frac{b}{m},\ \omega_0\equiv\sqrt{\frac{k}{m}}$ 爲無阻泥簡諧振盪之自然頻率。上式之齊次部分，因爲已知爲 under damped 所以通解爲

$$
\begin{aligned}
& n=\frac{1}{2\tau}\left(-1\pm i\sqrt{4\omega_0^2\tau^2-1}\right) \\
& \Rightarrow x_h(t)=A\exp\left(\frac{-t}{2\tau}\right)\cos\left[\left(\sqrt{\omega_0^2-\frac{1}{4\tau^2}}\right)t+\varphi\right]
\end{aligned}
$$

由於 x_h(t)裡有一個 exp(-t)所以不論ω和ω_0是否相同，都不會與 g(t)重複，所以 particular solution 就可以用 $x_p(t)=a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)$ 代回（1-19）

$$
\left(-a\omega^2+\frac{b\omega}{\tau}+a\omega_0^2\right)\cos(\omega t)+\left(-b\omega^2-\frac{a\omega}{\tau}+b\omega_0^2\right)\sin(\omega t)=\frac{F_0}{m}\sin(\omega t)
$$

$$
\Rightarrow\begin{cases}a(\omega_0^2-\omega^2)+\dfrac{b\omega}{\tau}=0\\[2ex] b(\omega_0^2-\omega^2)-\dfrac{a\omega}{\tau}=\dfrac{F_0}{m}\end{cases}
\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{-\omega\tau F_0}{m[\omega^2+\tau^2(\omega^2-\omega_0^2)^2]}\\[2ex] b=\dfrac{-\tau^2(\omega^2-\omega_0^2)F_0}{m[\omega^2+\tau^2(\omega^2-\omega_0^2)^2]}\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
& \Rightarrow x_h=-c\cos(\omega t-\theta) \\
& where\ c=\frac{\tau F_0}{m\sqrt{\omega^2+\tau^2(\omega^2-\omega_0^2)^2}},\tan\theta=\frac{\omega}{\tau(\omega^2-\omega_0^2)}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow x(t)=A\exp\left(\frac{-t}{2\tau}\right)\cos\left[\left(\sqrt{\omega^2-\frac{1}{4\tau^2}}\right)t+\varphi\right]-c\cos(\omega t-\theta)
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow v(t)=\frac{-A}{2\tau}\exp\left(\frac{-t}{2\tau}\right)\left\{\cos\left[\left(\sqrt{\omega^2-\frac{1}{4\tau^2}}\right)t+\varphi\right]+(\sqrt{4\omega^2\tau^2-1})\sin\left[\left(\sqrt{\omega^2-\frac{1}{4\tau^2}}\right)t+\varphi\right]\right\}+ \\
c\omega\sin(\omega t+\theta)
\end{aligned}
$$

當然，我們可以 impose initial condition

$$\Rightarrow \begin{cases} x(0) = A\cos(\varphi) - c\cos\theta = 0 \\ v(0) = \dfrac{-A}{2\tau}\left[\cos(\varphi) + (\sqrt{4\omega^2\tau^2 - 1})\sin(\varphi)\right] + c\omega\sin\theta = 0 \end{cases}$$

去解出 x(t)的完整解，但是因為「短時間」的「暫態」最後會消失，所以我們比較關心的是「長時間的」行為， 所以當 $t >> \tau$ 時 x(t)裡的第一項會因「指數衰減」而消失而只剩第二項，i.e.,

$$\Rightarrow x(t >> \tau) = -c\cos(\omega t - \theta)$$

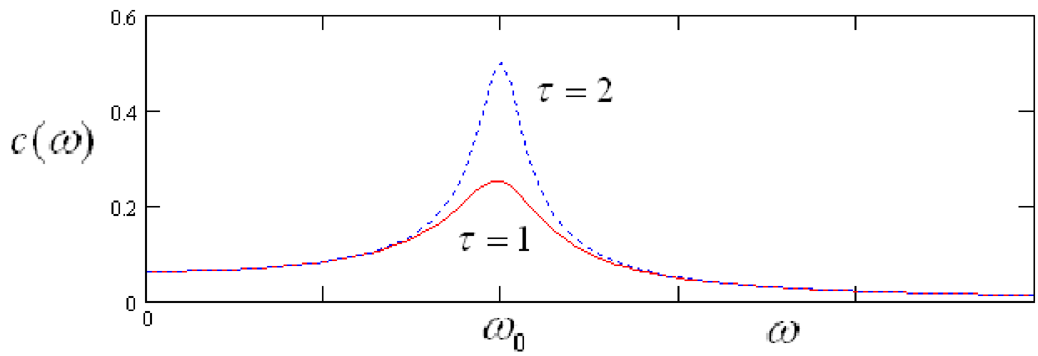
這與簡諧運動相同，表示最後外力主導振子的運動

$$x(t >> \tau) = \frac{-\tau F_0}{m\sqrt{\omega^2 + \tau^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2}}\cos(\omega t - \theta)$$

值得注意的是最後振盪的振福

$$c = \frac{\tau F_0}{m\sqrt{\omega^2 + \tau^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2}}$$

在當 $\omega_0 = \omega$ 時為最大，這表示外力與彈簧頻率達到「共振」，但是「振幅」卻沒有隨時間的增長而發散，是因為系統有能量損耗機制 τ ！令 F_0＝1, m =1, $\tau = 1,\ 2$ 做圖



其實（1-19）式的形式在其他的系統也會出現，例如電路學裡的 RLC 外加交流偏壓時的方程式就與（1-19）完全一樣。

娛樂一下：try critical-damped 與 over-damped cases. 她們的「長時間行為」與 over-damped 相同嗎？Why?

初等物數 Homework #1

For problems 1 to 9 find the general solution and/or the particular solution that satisfy the given initial conditions:

1. $xy' = 4y, \quad y(1) = -3$
2. $y' = e^x (1-y^2)^{1/2}, \quad y(0) = \dfrac{1}{2}$
3. $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}, \quad y(2) = 3$
4. $2(y-1)y' = e^x, \quad y(0) = -2$
5. $(\cos^2 x)y' = y^2(y-1)\sin x$
6. $x^2 y' = y^2 + 2xy$
7. $xy' = y - xe^{y/x}$
8. $e^{y/x} y' = 2(e^{y/x} - 1) + \dfrac{y}{x} e^{y/x}$
9. $xy' = y + (x^2 + y^2)^{1/2}$

10. Show that an equation of the from $y' = F(ay + bx + c), a \neq 0$, becomes separable under the change of dependent variable $v = ay + bx + k$ where k is any number.

For problems 11 to 14 find the order of the ODE and determine whether it is linear or nonlinear:

11. $y' = e^x$
12. $y' + e^x = 0$
13. $y^{(4)} + 3(\cos x)y''' + y' = 0$
14. $yy''' + y' = 0$

For problems 15 to 20 find the general solution and particular solution that satisfies the specified the conditions:

15. $y' = 3x^2 \sin x^3$
16. $y'' = 8e^{-2x} + e^x$
17. $y' = 0 \quad , \quad y(2) = -5$
18. $y' = 4x - 3 \quad , \quad y(4) = 3$
19. $y'' = 9e^{-3x} \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 2$
20. $y'' = \cos x \quad , \quad y(\pi) = 2 \quad , \quad y'(\pi) = 0$

21. Suppose that a function f is a solution of the initial value problem $y' = x^2 + y^2$, $y(1) = 2$. Find $f'(1), f''(1),$ and $f'''(1)$.

22. Show that the problem $y' = 2x$, $y(0) = 0$, $y(1) = 100$, has no solution. Is this an initial value problem?

23. Let x_0 be the amount of radioactive substance present at $t = 0$ and let T be the time required for one-half of the substance to decay. Show that T is independent of x_0. The time T is called the *half − life* of the radioactive substance.

24. Let $x(1)$ be the amount of a radioactive substance present at time t and let $x(0) = x_0$. If T is the half-life (see Exercise 23) show that $x(t) = x_0 2^{-t/T}$

For problems 25 to 32 find the general solution and particular solutions that satisfies the initial conditions:

25. $y' + 2y' + 4y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
26. $y'' + y' + y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$
27. $y'' + 2y' + y = 0$; $y(-2) = 3$, $y'(-2) = -1$
28. $y'' + 6y' - 5y = 3x^2 - 4$
29. $y'' - 3y + 5y = e^x + \cos(2x)$
30. $y'' + y = x^2 - 4 + \sinh(3x)$
31. $y'' - 6y + 7y = \sin(2x) + \sin(3x)$
32. $y'' + 4y = -3\cos(3x) + \sin(2x)$

33. problem I-6 of *“div grad curl and all that”*.