Chap. 2　Series Expansions

§ 2-1　Power Series（冪級數）

定義一個 x 的多項式(polynomial)為

$$P(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0,\quad a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \text{ 皆為常數}$$

如果 $n \geq 1$ 且 $a_n \neq 0$，我們稱該多項式的「次數 degree」為 n 次。如果 n = 0 則多項式 P(x)為 0 次多項式。

微積分裡最簡單的函數就是多項式及經由+,−,×,÷幾個多項式或多項式取次方或跟號所建構的函數，這一類的函數我們稱為「代數函數 algebraic functions」。例如

$$f(x)=\left(\frac{x^2-3x+1}{2x+5}\right)^3,\qquad g(x)=\sqrt{x^3+1}.$$

然而有許多複雜的函數是無法用代數函數表示的，例如

$$\ln x=\int_1^x \frac{1}{t}dt,\ x>0 \quad 與 \quad \sin^{-1}x=\int_0^x (1-t\ )^{-1/2}dt\ ,\quad |x|\leq 1$$

另有一類函數可以經由無一些簡單函數的窮數列或無窮級數來定義，例如

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad 與 \quad \sin x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

時常一個微分方程式的解是必須用冪級數來表示的。

一個（對點 x_0）的 power series 是一個函數的級數，寫為

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots\ldots\ldots \qquad (2\text{-}1)$$

上式中 x_0 為一固定數字，稱為「展開中心 the center of expansion」，a_n 則為係數。上述的 power series 不一定對每一個 x 值都收斂但是對 $x = x_0$ 永遠收斂到值 a_0.如果一個 power series 不是只收斂到點 x_0 或對所有 x 都收斂的話，會存在一個數 R 使得 power series 對所有 $|x-x_0|<R$「絕對收斂」且對 $|x-x_0|>R$ 都發散，這個數 R 稱為該 power series 的

「收斂半徑 the radius of convergence」，而區間 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 稱爲該 power series 的「收斂區間 the interval of convergence」。power series 因爲包含了無窮多項，所以不能排除發散的問題，所以必須訂出「收斂區間」,不然，發散的 power series 是沒有意義的。

定理 2-1　power series (2-1)的收斂半徑爲

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \text{，若}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \to \infty \text{則 } R = \infty$$

本定理我們不在這裡證明，證明請看微積分課本。

Ex. 1. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(x-1)^n}{n!}$, $x_0 = 1$, $a_n = \frac{2^n}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\Rightarrow R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n/n!}{2^{n+1}/(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2}\right| \to \infty$$

本 series 對所有 x 都收斂。

Ex. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n$, $x_0 = 0$,

$$\Rightarrow R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n/(n+1)}{(n+1)/(n+2)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1+2/n)}{(1+1/n)^2}\right| = 1$$

本 series 對｜x |＜1 收斂，對｜ x ｜＞1 發散。

一個 power series 可以定義一個以「收斂區間」C 或 C 加上一或二端點的區間爲「定義域」的函數 f。f 在「收斂區間」裡的點 x 的函數值 f(x)即等於 series 在 x 的值：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{, for } x \in C$$

定理 2-2 令 f(x) = $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, g(x) = $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$, for $|x-x_0|<$ r , then

for $|x-x_0|<$ r ,

$$c\, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n (x-x_0)^n \quad \text{for every real } c.$$

$$f(x)+g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)(x-x_0)^n \text{ ， and}$$

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_0)^n \text{ ,其中}$$

$$C_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots\dots\dots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

(證明請見 p. 635, Theorem XVII, Taylor, *Advanced Calculus*)

ex. 3 令 f(x) = $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$, g(x) = $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, find 收斂區間及 f(x)g(x).

$$f(x):\ R_f = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}\right| = 1 \text{ ， } g(x):\ R_g = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1}\right| = 1$$

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k+1)(1) = 1+2+\dots\dots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\therefore\ f(x)g(x) = \sum \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n$$

定理 2-3 令 f(x) = $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, $|x-x_0|<$ R 則 f 在 $(x_0 - \mathrm{R}, x_0+\mathrm{R})$ 可微分

且 $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_{n-1} (x-x_0)^{n-1}$ $|x-x_0|<$ R 。若 a and $b \in (x_0 - R, x_0 + R)$ 則

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\left[(b-x_0)^{n+1} - (a-x_0)^{n+1}\right].$$

In particular,

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} \qquad |x-x_0|<\mathrm{R}$$

ex. f(x) $=\sum_{n=0}\frac{n+1}{n+2}x^{n} \Rightarrow f'(x)=\sum_{n=1}\frac{n(n+1)}{n+2}x^{n-1} \Rightarrow f''(x)=\sum_{n=2}\frac{n(n+1)(n-1)}{n+2}x^{n-2}$

或可以將 index n 的起點都移到 0 開始：令 k = n-1, n = 1 時 k = 0,以 n = k+1 代入

$$f'(x)=\sum_{n=1}\frac{n(n+1)}{n+2}x^{n-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)(k+2)}{(k+3)}x^{k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)}x^{n}\ .$$

同樣的，令 n = k+2

$$f''(x)=\sum_{n=2}\frac{n(n+1)(n-1)}{n+2}x^{n-2}=\sum_{k=0}\frac{(k+2)(k+3)(k+1)}{k+4}x^{k}=\sum_{n=0}\frac{(n+2)(n+3)(n+1)}{n+4}x^{n}\ .$$

有些時候當「展開中心」$x_0 \neq 0$時，為了方便我們可以改變變數，令 z = x –x_0

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

§ 2-2 Taylor series 泰勒級數

令 f 為一個由 power series 在其「收斂區間」所定義的函數

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\ , \qquad |x-x_0|<\mathrm{R}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot a_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)\cdot a_n(x-x_0)^{n-2}$$

$$\Rightarrow f^{[k]}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n\cdot(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)\cdot a_n(x-x_0)^{n-k} \qquad |x-x_0|<\mathrm{R}$$

令 $x=x_0$，$f'(x_0)=a_1$ ，$f''(x_0)=2\cdot 1\cdot a_2$,............, $f^{[k]}(x_0)=k\cdot(k-1)\ldots\ldots.2\cdot 1\cdot a_k$

$$\Rightarrow a_k=\frac{f^{[k]}(x_0)}{k!} \qquad k=0,1,2\ldots\ldots$$

如此，如果函數 f 在 x_0 那一點是無窮多次可微，then 函數 f 就可以在收斂區間以 power series

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{[n]}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad \text{（2-11）}$$

表示。（2-11）稱爲 f 在 x_0 的泰勒級數。在一個 special case 當選 $x_0 = 0$ 時，（2-11）也稱爲 Maclaurin series for f。

如果 series（2-11）在某個區間 $(x_0 - r, x_0 + r),\ r > 0$ 裡的每一個 x 都收斂到 f(x)，我們稱函數 f 在 x_0 那一點是「解析的 analytic」。

Ex. $f(x) = e^x \Rightarrow f^{[n]}(x) = e^x \Rightarrow f^{[n]}(0) = 1$ 對所有的正整數 n 都成立。f 的 Maclaurin series 爲

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{且} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1/n!}{1/(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) \to \infty \quad \Rightarrow R \to \infty$$

所以 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 對 all x 都成立。

Ex. Find Maclaurin series for cos(x) and sin(x)

Sol. $f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin x \Rightarrow f''(x) = (-1)\cos x \Rightarrow f'''(x) = (-1)^2 \sin(x)....$

所以 $f'(0) = 0, f''(0) = -1, f'''(0) = 0.......$ 可以歸納出

$$f^{[n]}(0) = \begin{cases} (-1)^{n/2}, & n: \text{even} \\ 0, & n: \text{odd} \end{cases} \Rightarrow \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{for all x}$$

請測試收斂半徑 $R \to \infty$。同樣的也可以得出

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \text{for all x.}$$

所以當 x 的值很小時就可以運用 Maclaurin series,省略高次項，來近似

$$\begin{cases} \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} .... \\ \sin x \sim x + \frac{x^3}{3!} .... \end{cases}$$

ex. 請自行證明幾何級數 geometric series: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$。

Ex. 請自行證明二項式級數 binomial series

$$(1+x)^m = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n \text{ , } |x| < 1$$

如果上式中的 m 是一個非負值的整數，那麼上式的級數就只剩有限項（成了多項式了），也對所有的 x 成立。

有了泰勒級數（or 泰勒展開）

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{[n]}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

函數 f 在 x_0 附近的函數值就可以得到近似值：

$$f(x_0+\delta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{[n]}(x_0)}{n!}(x_0+\delta-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{[n]}(x_0)}{n!}\delta^n$$

由於 δ 是小量，所以上式只要取前幾項即可。

Ex. 求 ln(1+x)的泰勒展開式

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t}dt, \qquad x>-1 \\ &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt, \ |x|<1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^n dt, \ |x|<1 \\ \Rightarrow \ln(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}, \quad |x|<1 \end{aligned}$$

ex. Find the Maclaurin series for $f(x)=\dfrac{x}{2x+3}$

$$f(x)=\frac{x}{2x+3}=\frac{x}{3}\frac{1}{1+\frac{2}{3}x}$$

$$\text{for } \frac{1}{1+\frac{2}{3}x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{2}{3}x)^n \qquad \text{where } |\frac{2}{3}x|<1 \ \text{ or } \ |x|<3/2$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{2}{3}x)^{n+1} \qquad |x|<3/2$$

ex. 當 x<<1, 計算 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ 的近似値至 2nd order of x.

因爲 $f'(x)=\frac{-1}{2}(1+x)^{-3/2}$, $f''(x)=\frac{-1}{2}\cdot\frac{-3}{2}(1+x)^{-5/2}=\frac{3}{4}(1+x)^{-5/2}$ ，所以

$$f(x)\approx f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{2}x^2=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2 \qquad (2\text{-}12)$$

§ 2-3 Physical examples

ex. 電偶極 electric dipole 的電位

考慮一組$\pm q$電荷相距 s，試求距離此電偶極「很遠處」的電位。

解：定座標系使原點位於電偶極的中央，+q 位於 z = s/2, -q 位於 z = -s/2, 計算距離電偶極中點$\bar{r}$處的電位(距離 r,與 z 軸夾角θ)。所謂遠距離是「距離本系統很遠處」i.e., r >> s 或 s/r <<1. 令＋q 到觀測點的距離爲 r_+，-q 到觀測點距離 r_-,由餘弦定理及（2-12），up to 1st order of s/r

$$\frac{1}{r_\pm}=\frac{1}{\sqrt{r^2+(\frac{s}{2})^2\mp r\cdot s\cdot\cos\theta}}=\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1+\left[(\frac{s}{2r})^2\mp\frac{s\cdot\cos\theta}{r}\right]}}$$

$$\approx\frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{2}\left[\mp\frac{s\cdot\cos\theta}{r}+\left(\frac{s}{2r}\right)^2\right]\right)$$

$$\therefore V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_+}-\frac{1}{r_-})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{s}{2r})^2-\frac{s\cdot\cos\theta}{r}}}-\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{s}{2r})^2+\frac{s\cdot\cos\theta}{r}}}\right)$$

$$\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\left[-\frac{s\cdot\cos\theta}{r}+\left(\frac{s}{2r}\right)^2\right]\right)-\left(1-\frac{1}{2}\left[+\frac{s\cdot\cos\theta}{r}+\left(\frac{s}{2r}\right)^2\right]\right)\right\}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\frac{s\cos\theta}{r}\right]=\frac{qs\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

其中 $P=qs$ 爲電偶極矩。比較單電荷的電位與 r 的一次方成反比（電場與 r 的平方成反比），電偶極的電位與 r 的平方成反比（電場與 r 的 3 次方成反比）所以電偶極的電場比單電荷的弱，這是因爲在遠處看，電偶極裡的＋、—電荷相互抵銷的效應。

Ex. 單擺

考慮一單擺，擺長ℓ錘質量 m 擺線與鉛直夾角θ，做小角度擺動，求運動方程式。解：擺錘擺動的弧長爲$r=\ell\cdot\theta ,\Rightarrow \ddot{r}=\ell\cdot\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow m\ddot{r}=-m\cdot g\cdot sin\theta \Rightarrow \ell\cdot\ddot{\theta}=-g\cdot sin\theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}+\frac{g}{\ell}\cdot sin\theta=0$$

上式爲一個「非線性振子」的運動方程式。然當小角度擺動時

$\theta\sim 0 \ \Rightarrow sin\,\theta\sim\theta \Rightarrow \ \ddot{\theta}+\frac{g}{\ell}\cdot\theta=0$ ：簡諧運動！

Ex. Debye formula for 固體比熱（T^3 定律與 Dulong-Petit 定律）

經由量子力學的計算 Debye 算出絕緣體的定容比熱爲

$$C_V=3RD\left(\frac{T}{\theta}\right)$$

其中 R 爲理想氣體常數，θ是一特徵溫度常數稱爲 Debye 溫度，而函數 D 爲

$$D(t)=12t^3\int_0^{\frac{1}{t}}\frac{x^3}{e^x-1}dx\ -\frac{3/t}{e^{1/t}-1}$$

在低溫時，i.e., $\frac{T}{\theta}<<1$

$$\mathrm{D}\left(\frac{T}{\theta}\right)=12\left(\frac{T}{\theta}\right)^3\int_0^{\frac{\theta}{T}}\frac{x^3dx}{e^x-1}-\frac{3\theta/T}{e^{\theta/T}-1}\cong 12(\frac{T}{\theta})^3\int_0^{\infty}\frac{x^3dx}{e^x-1}\ \sim T^3$$

上式中$\frac{3\theta/T}{e^{\theta/T}-1}\to 0\ \ as\,\frac{\theta}{T}\to\infty$。這個低溫的 T^3 行爲與實驗結果相符。

又在高溫時，i.e., $\frac{\mathrm{T}}{\theta}>>1$

$$D\left(\frac{T}{\theta}\right)=12\left(\frac{T}{\theta}\right)^3\int_0^{\frac{\theta}{T}}\frac{x^3}{e^x-1}dx-\frac{3\,T/\theta}{e^{T/\theta}-1}$$

上式的積分中由於積分限由 0 到$\frac{\theta}{T}<<1$表示被積分函數中的 x 的可能

值都很小所以被積函數$\frac{x^3}{e^x-1}\sim\frac{x^3}{1+x-1}\sim x^2$

$$\Rightarrow D\left(\frac{T}{\theta}\right)=12\left(\frac{T}{\theta}\right)^3\int_0^{\frac{\theta}{T}} x^2dx-\frac{3(\theta/T)}{1+(\theta/T)-1}$$

$$=12\left(\frac{T}{\theta}\right)^3\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\theta/T}-3$$

$$=4(\frac{T}{\theta})^3(\frac{\theta}{T})^3-3$$

$$=4-3=1$$

使得高溫行為$C_V=3R$，與古典的 Dulong-Petit 定律相同也於符合實驗結果。

＊ 函數的解析性(analyticity)

ex. $f(x)=\dfrac{1}{1-x},\ x\in(-\infty,1)\cup(1,\infty)$

我們已知

$$\frac{1}{1-\mathrm{x}}=\sum_{\mathrm{n}}\mathrm{x}^{\mathrm{n}}\quad for\,|\,\mathrm{x}\,|<1$$

這表示當對 x = 0 展開時，級數$\sum_n x^n$適用用於 | x |<1。這裡也可以更清楚的看出「收斂半徑」的意義：因為明顯的$\dfrac{1}{1-x}$在 x = 1 這一點發散，所以若以 x = 0 為準的展開式，其有效性一定到 x = 1「之前」為止，所以「收斂半徑」R＝1，若「收斂半徑」居然比 1 大，那就表示從 x = 0 開始的展開式也適用於發散點 x=1 了，這明顯矛盾。但是這並不表示函數$\dfrac{1}{1-x}$只在(-1,1)區間為可解析的。現在嘗試對 x = 3 展開，由於

$$f^{[n]}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\ \Rightarrow\ f^{[n]}(3)=\frac{n!}{(-2)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow\sum\frac{f^{[n]}(3)}{n!}(x-3)^n=\sum\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}(x-2)^n$$

收斂半徑爲 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1/2)^{n+1}}{(-1/2)^{n+2}}\right|=2$，表示 $\dfrac{1}{1-x}$ 在（1, 5）區間亦爲 analytic，也由於函數在 x = 1 發散，所以以 x =3 爲準，展開式有效到 x=1 爲止，所以收斂半徑　　R＝2。所以一個函數的級數展開是不是唯一的。對於不同的區間（展開中心），展開式是不同的。

Ex. 在用級數展開取近似值時要注意取到第幾個 order,例如

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-(t+t^2)} &= 1+(t+t^2)+(t+t^2)^2 \\
&= 1+t+t^2+t^2+2t^3+\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\cong 1+t+2t^2
\end{aligned}
$$

即在原展開式的 2nd order 仍對 t^2 有貢獻。

Ex. Evaluate 積分 $I=\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}x^2dx$

$$\because \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}x^2=\frac{x^2}{(e^{x/2}+e^{-x/2})^2}\Rightarrow I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}x^2dx=2\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}x^2dx$$

$$\because if\ \ x>0, e^{-x}<1$$

$$\left[for\ \ f(u)=\frac{1}{(1+u)^2}\ \Rightarrow f^{(n)}(u)=\frac{(n+1)!\,(-1)^n}{(1+u)^{n+2}}\Rightarrow f(u)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n u^n\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+e^{-x})^2}=1-2e^{-x}+3e^{-2x}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Rightarrow I=2\int_0^{\infty}e^{-x}(1-2e^{-x}+3e^{-2x}+\ldots\ldots)x^2dx=2\int_0^{\infty}x^2(e^{-x}-2e^{-2x}+3e^{-3x}+\ldots\ldots)dx$$

$$=2(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\ldots)=\frac{\pi^2}{6}.\ for\ \ \sum_{n=0}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

§ 2-3　用基本函數（elementary functions）表出 power series

ex. 1. Find $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^{n+1}$. $Hint: e^x=\sum_{n=0}\frac{x^n}{n!}$

解：法 1：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^{n+1}=x\sum_{n=0}\frac{n+1}{n!}x^n$

$$=x\left[\sum_{n=0}\frac{nx^n}{n!}+\sum_{n=0}\frac{x^n}{n!}\right],$$

$$=x\left[\left(0+\sum_{n=1}\frac{nx^n}{n!}\right)+\sum_{n=0}\frac{x^n}{n!}\right]=x\left[\sum_{n=1}\frac{x^n}{(n-1)!}+\sum_{n=0}\frac{x^n}{n!}\right]$$

$$=x\left[\sum_{n=0}\frac{x^{n+1}}{n!}+\sum_{n=0}\frac{x^n}{n!}\right]=x\left[x\sum_{n=0}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}\frac{x^n}{n!}\right]$$

$$=x^2e^x+xe^x=(x^2+x)e^x$$

法 2：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^{n+1}=x\sum_{n=0}\frac{n+1}{n!}x^n=x\sum_{n=0}\frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n!}$

$$=x\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}\frac{x^{n+1}}{n!}\right)=x\frac{d}{dx}(x\sum\frac{x^n}{n!})$$

$$=x\frac{d}{dx}(xe^x)=(x^2+x)e^x.$$

ex.2　Find $\sum_{n=0}\frac{n+2}{n+1}x^{n+1}$. Hint: $\sum x^n=\frac{1}{1-x}$

解：$\sum_{n=0}\frac{n+2}{n+1}x^{n+1}=\sum\frac{n+1+1}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=0}x^{n+1}+\sum_{n=0}\frac{x^{n+1}}{n+1}$

上式第一項＝$x\sum_{n=0}x^n=\frac{x}{1-x}$，第二項＝ $\sum_{n=0}\int_0^x t^n dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}t^n\right)dt$

所以原式$\sum_{n=0}\frac{n+2}{n+1}x^{n+1}=\frac{x}{1-x}+\int\left(\sum_{n=0}t^n\right)dt=\frac{x}{1-x}+\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=\frac{x}{1-x}-ln(1-x)$.

習題

1. Find the interval of convergence of the power series

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}(x+3)^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty}n^n(x+5)^n$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$

2. Find the Taylor series for the function f about the point x_0 by calculating the derivatives of the function at x_0.

   (a) $f(x)=2x^3-3x^2+x-3,\ x_0=2$

   (b) $f(x)=-1/x,\ x_0=-1$

   (c) $f(x)=\ln x,\ x_0=1$

   (d) $f(x)=\cos x,\ x_0=\pi/4$

   (e) $f(x)=e^{3x},\ x_0=0$

3. Use the geometric and binomial series to find the Taylor series for the function f about the point x_0. Indicate an interval on which the series converges to the function.

   (a) $\frac{1}{x},\ x_0=2$ (b) $(1-x^2)^{-1/2},\ x_0=2$

4. Find the Maclaurin series of the given function by differentiation or integration of another series.

   (a) $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$ (b) $f(x)=\tan^{-1}x$ (c) $f(x)=\tanh^{-1}x$

5. Express the sum of the series in terms of elementary functions.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$ (a) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{2n}$