Chapter 3 Matrices and Vectors 矩陣與向量

§ 3-1 Matrices 矩陣

令 m 與 n 爲正整數，一個大小(size)或「階數 order」爲 $m \times n$ 的矩陣是一個數字 A_{ij} 的有序集合(ordered set)其中 $1 \le i \le m$，$1 \le j \le n$，長相如下：

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

矩陣內的數字 A_{ij} 稱爲第「i 列（橫）、第 j 行（直）」的「矩陣元素 matrix element」，若 $m = n$ 則 A 稱爲「方陣 square matrix」。下列 3-1 表列出矩陣 A 相關的矩陣

matrix	elements	example
A	A_{ij}	$\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$
$\tilde{A}$ (or A^T) Transpose of A (倒置)	$(\tilde{A})_{ij} = A_{ji}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ i & 2 \end{pmatrix}$
A^* Complex conjugate of A (複數共軛)	$(A^*)_{ij} = (A_{ij})^*$	$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$
$A^+ \equiv (\tilde{A})^*$ Hermitian conjugate of A （厄密共軛）	$(A^+)_{ij} = (\tilde{A}_{ji})^* = A_{ji}^*$	$\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$

＊Hermitian conjugate $A^{+}=(A^{T})^{*}=(A^{*})^{T}$

pf. $(A^{*})^{T}_{ij}=(A^{*})_{ji}=(A_{ji})^{*}=(\tilde{A}_{ij})^{*}=\tilde{A}^{*}_{ij}$, q.e.d.

＊對於矩陣 *A*,若存在矩陣 A^{-1} 使得

$$A^{-1}A=AA^{-1}=1=\begin{pmatrix}1&0&0&...\\0&1&0&...\\0&0&1&...\\...&...&...&...\end{pmatrix}$$

A^{-1} 稱爲 *A* 的反矩陣(inverse). 上式中的「1」矩陣稱爲「單位矩陣 unit matrix」，其元素除了對角線上的元素全爲 1 之外其餘元素全爲 0。此處引進一個符號

Kronecher delta: $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & if\ \ i=j\\0, & if\ \ i\neq j\end{cases}$ ，即 $1_{ij}=\delta_{ij}$ 。

可以證明任何方陣 A 乘以相同大小的單位矩陣 1 等於 A 自己，即

1A＝A1＝A

pf. $(1\cdot A)_{ij}=\sum_{k}1_{ik}A_{kj}=\sum_{k}\delta_{ik}A_{kj}=A_{ij}$（因爲所有 $k\neq i$ 的項都爲 0）。又

$(A\cdot 1)_{ij}=\sum_{k}A_{ik}1_{kj}=\sum_{k}A_{ik}\delta_{kj}=A_{ij}$（因爲所有 $k\neq j$ 的項都爲 0）

＊ 矩陣的相等： $A=B\Leftrightarrow A_{ij}=B_{ij}$ ，即各對應元素皆相等。

＊ 若 A 與 B 爲相同的 n 階方陣則定義運算如下

$$(\lambda A)_{ij}=\lambda A_{ij},\qquad \lambda=const.\quad (3-1)$$

$$(A+B)_{ij}=A_{ij}+B_{ij}\qquad (3-2)$$

$$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{ki}\qquad (3-3)$$

$$\begin{pmatrix}(AB)_{11}&(AB)_{12}&...&...\\...&...&...&...\\...&...&(AB)_{ij}&...\\...&...&...&...\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&...&...\\...&...&...&...\\A_{i1}&A_{i2}&...&A_{in}\\A_{n1}&...&...&...\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&...&B_{1j}&B_{1n}\\B_{21}&...&B_{2j}&...\\...&...&...&...\\...&...&B_{nj}&...\end{pmatrix}$$

（3-3）全寫出來就是 $\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{ki}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+...+A_{in}B_{nj}$ 。

若$C = AB,\ C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$

ex. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$

ex. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 1 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.\cdot 1+5\cdot 0+8\cdot 4 & 2.\cdot 0+5\cdot 8+8\cdot 7 & 3.\cdot 1+6\cdot 0+9\cdot 4 \\ 1.\cdot 1+2\cdot 0+3\cdot 4 & 1.\cdot 0+2\cdot 8+3\cdot 7 & 3\cdot 0+6\cdot 8+9\cdot 7 \\ 3\cdot 1+6\cdot 0+9\cdot 4 & 3.\cdot 0+6\cdot 8+9\cdot 7 & 3.\cdot 2+6\cdot 1+9\cdot 5 \end{pmatrix}$

注意，通常$AB \neq BA$，例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ but\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

但是$(AB)C = A(BC)$

pf.

$$((AB)C)_{ij} = \sum_k (AB)_{ik} C_{kj} = \sum_k \sum_t A_{it} B_{tk} C_{kj} = \sum_t A_{it} \sum_k B_{tk} C_{kj} = \sum_t A_{it} (BC)_{tj} = (A(BC))_{ij}$$

∗ $(AB)^T = B^T A^T$

$$pf.\ (AB)^T_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_k A_{jk} B_{ki} = \sum_k A^T_{kj} B^T_{ik} = \sum_k B^T_{ik} A^T_{kj} = (B^T A^T)_{ij} \Rightarrow (AB)^T = B^T A^T$$

∗ $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

$$\left.\begin{array}{l} \because (B^{-1}A^{-1})\cdot(AB) = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}B = 1 \\ and\ \ (AB)\cdot(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$$

∗ 矩陣 A 的行列式（determinant）detA

每一個 n 階的方陣 A 都對應一個數字稱為 A 的行列式。

2×2 矩陣行列式的定義如下：

$$\text{if}\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb.$$

3 階方陣的行列式定義如下：

∗ The Levi-Civita symbol ε_{ijk}

考慮{i, j, k}為{1, 2, 3} 3 個正整數的有序排列(permutaion)集合,這樣的集合共有 3!＝6 個︰{1,2,3},{1,3,2},{2,1,3},{2,3,1},{3,1,2},{3,2,1} .

定義「交換數 number of inversion」爲{i, j, k}經相鄰數字左、右交換而成{1,2,3}的總交換數。定義 Levi-Civita 符號 ε_{ijk}

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}+1, & if\ \ number\ \ of\ \ inversion\ \ of\ \ \{i,j,k\}\to\{1,2,3\}=even.\\-1, & if\ \ number\ \ of\ \ inversion\ \ of\ \ \{i,j,k\}\to\{1,2,3\}=odd\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1\\\varepsilon_{132}=\varepsilon_{213}=\varepsilon_{321}=-1\end{cases}$$

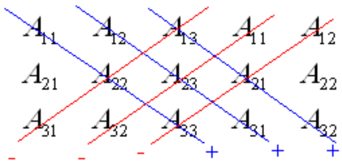
且 $\varepsilon_{ijk}=0$ 如果任二腳標相等，i.e., $\varepsilon_{112}=\varepsilon_{131}=\varepsilon_{212}=...=0$

＊ 一個 3 階矩陣 A 的「行列式」det$A$ 定義爲

$$\det A=\begin{vmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{vmatrix}=\sum_{all\{i,j,k\}}\delta_{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k}$$

$$\det A=\sum\varepsilon_{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k}=A_{11}A_{22}A_{33}+A_{13}A_{23}A_{32}+A_{12}A_{23}A_{31}-A_{13}A_{22}A_{31}+A_{12}A_{21}A_{33}-A_{11}A_{23}A_{32}$$

有一種簡單的 3×3 矩陣行列式的算法：



$$\text{ex. } A=\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&3&0\\2&-4&5\end{vmatrix}=\begin{matrix}1&2&3&1&2\\-1&3&0&-1&3\\2&-4&5&2&-4\end{matrix}=15+0+12-18-0+10=19$$

$$=1\cdot\begin{vmatrix}3&0\\-4&5\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}-1&0\\2&5\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}-1&3\\2&-4\end{vmatrix}=15-2(-5)+3(4-6)=15+10-6=19$$

另有一個 3 階方陣行列式的算法：

$$\det \text{A}=\sum_{j=1}^{3}(-1)^{i+j}A'_{ij}\text{，　對任何一列　i.}$$

其中 A'_{ij} 爲「cofactor of element A_{ij}」

A'_{ij} = det (原方陣 A 去掉第 i 列及第 j 行剩下的 n-1 階方陣)

＊ 行列式爲 0 的方陣稱爲「singular matrix」.若一方陣行列式非 0 則爲「nonsingular」.

＊ 由「行列式」的定義可推出下列性質：

1. $\det(A^T) = \det A$

2. 若 A 任何行或列全為 0 則 $\det A = 0$。例如 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$。

3. $\begin{vmatrix} \gamma a & \gamma b & \gamma c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \gamma \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$. 例如 $\begin{vmatrix} -6 & 3 & -9 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$。

4. A 任二行（或列）互換後所得的方陣的行列式＝-det A .例如

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}。$$

5. 若 A 的任二行（或列）的元素全等，則 det A = 0.例如

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0。$$

6. det A 可經由某行（或列）的「拆解」而成 2 個方陣行列式的和。

例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2+3 & 3 \\ 0 & 1-4 & 5 \\ 2 & -2+0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}。$$

7. 某行（或列）加上另一行（或列）的 c 倍後，新方陣的行列式不變。例如

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -6 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$：右邊的行列式為左邊的第一列加上第二列$\times 2$。

＊ A 的反矩陣 A^{-1}

$(A^{-1})_{ij} = \dfrac{cofactor\ of\ A_{ji}}{\det A}$, i.e., if $\det A = 0$, A^{-1}不存在。其中

cofactor of $A_{ji}=(-1)^{j+i}$ det(A 去掉第 j 列與第 i 行後剩下的 n-1 階矩陣)

ex. $A=\begin{pmatrix}1 & i\\ 1+i & 2\end{pmatrix}\Rightarrow \det A=2-(i-1)=3-i\neq 0\Rightarrow A^{-1}=\dfrac{1}{3-i}\begin{pmatrix}1 & -i\\ -1-i & 1\end{pmatrix}$

check: $AA^{-1}=\dfrac{1}{3-i}\begin{pmatrix}2-i+1 & -i+i\\ 2+2i-2-2i & -i+1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ and $A^{-1}A=1$.

Ex. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det A=12\Rightarrow A^{-1}=\dfrac{1}{12}\begin{pmatrix}0 & 6 & 0\\ -2 & -5 & 6\\ 4 & -2 & 0\end{pmatrix}$

Check: $AA^{-1}=\dfrac{1}{12}\begin{pmatrix}12 & 6-6 & 0\\ 0 & 12 & 0\\ -4+4 & 12-10-2 & 12\end{pmatrix}=1=A^{-1}A.$

Ex. 非齊次聯立方程組的解

$$\begin{cases}ax+by+cz=\alpha\\ dx+ey+fz=\beta\\ gx+hy+lz=\gamma\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & l\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\equiv A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$$

上式兩邊$\times A^{-1}\Rightarrow A^{-1}A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$，只要$\det A\neq 0$。

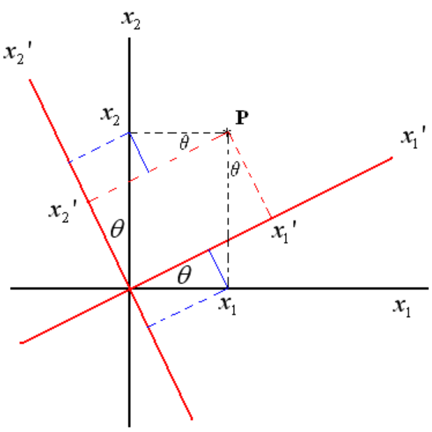
但是如果是齊次方程式$\alpha=\beta=\gamma=0$

$$\Rightarrow A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{if } A^{-1}\text{存在}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow x=y=z=0$$

就只剩全 0 的「自明解 trivial solution」。所以齊次方程組要想有 nontrivial solution，那麼方程組裡未知數係數所形成的矩陣的行列式就不能爲 0.

§ 3-2 座標轉換

考慮一個單純的座標旋轉。此處我們使用(x_1, x_2)而不用(x, y)來寫平面座標。考慮繞垂直於 x_1 與 x_2 軸且通過原點的軸



逆時針轉θ角，並定義轉完後的座標軸爲x'_1與x'_2軸。若平面上一點 P 其座標在原座標系爲(x_1, x_2)，在新座標系爲(x'_1, x'_2)則可看出新舊座標之間的關係爲

$$\begin{cases} x'_2 = -x_1\sin\theta + x_2\cos\theta & (3-1a) \\ \quad = x_1\cos(\frac{\pi}{2}+\theta) + x_2\cos\theta & (3-1b) \\ x'_1 = x_1\cos\theta + x_2\sin\theta & (3-2a) \\ \quad = x_1\cos\theta + x_2\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) & (3-2b) \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

其中$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$稱爲平面的「轉換或旋轉矩陣」。由(3-1b)與(3-2b)可以看出若定義

$$\lambda_{ij} \equiv \cos(x_i', x_j) = \cos(x_i' - axis \text{ 與 } x_j - axis \text{ 的夾角})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_{11} = \cos(x_1', x_1) = \cos\theta \\ \lambda_{12} = \cos(x_1', x_2) = \cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta \\ \lambda_{21} = \cos(x_2', x_1) = \cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\sin\theta \\ \lambda_{22} = \cos(x_2', x_2) = \cos\theta \end{cases}$$

這使得平面的座標旋轉可以重新寫爲

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{。}$$

或在 3D 空間

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1' = \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \lambda_{13}x_3 = \sum_{j=1}^{3}\lambda_{1j}x_j$$

$$similar \ \ for \ \ x'_2 \ \ and \ \ x'_3.$$

所以可以寫出一個通式

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3}\lambda_{ij}x_j, \quad for \ \ i = 1,2,3.$$ 請特別注意 i, j 的順序 （3-14）

做爲結論，3D 空間的旋轉矩陣可寫爲 $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}$

其矩陣元素 $\lambda_{ij} = \cos(x'_i, x_j)$ 爲 x'_i 軸在相對於 x_j 軸的「方向餘弦 directional cosine」.

Ex. 考慮值角座標系對 x_3 軸逆時針轉 90^o

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 \\ x_3' = x_3 \end{cases} \Rightarrow \text{非 0 矩陣元素爲} \begin{cases} \cos(x_1', x_2) = 1 = \lambda_{12} \\ \cos(x_2', x_1) = -1 = \lambda_{21} \\ \cos(x_3', x_3) = 1 = \lambda_{33} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

現考慮對 x_1 軸逆時針轉 90^o

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1' - axis = x_1 axis \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = -x_2 \end{cases} \Rightarrow \lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

若定義向量

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

考慮兩次座標旋轉：先對 x_3 軸逆時針轉 90^o 之後再對新的 x_1 軸逆時針轉 90^o

$$\Rightarrow X' = \lambda_1 X,\ and\ X'' = \lambda_2 X' = \lambda_2 \lambda_1 X \text{ 則}$$

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

然而若將這兩個座標旋轉的次序顛倒，結果

$$\lambda_1\lambda_2 X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

可以看出總旋轉矩陣 $\lambda_1\lambda_2 \neq \lambda_2\lambda_1$ 所以最終結果也不同。這也是矩陣乘法「不可交換性 non-commutibility」的一個明顯的例子。本例子也清楚點出旋轉運動中角度變化「角位移」$\Delta\theta$ 不是一個向量，因為不滿足向量加法的可交換性。

＊ 旋轉矩陣的性質

（1）空間中過原點一直線與 x_1, x_2, x_3 軸的夾角分別為 α, β, γ ，則該直線的「方向餘弦 directional cosine」滿足

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (3\text{-}5)$$

證明（3-5）式如下：令 $\vec{r}$ 為在直線上點 P 的位置向量

$$\Rightarrow \vec{r} = [r\cos\alpha, r\cos\beta, r\cos\gamma]$$

$$\vec{r}\cdot\vec{r} = x^2 + y^2 + z^2 = (r\cos\alpha)^2 + (r\cos\beta)^2 + (r\cos\gamma)^2 = r^2$$
$$\Rightarrow (\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\gamma)^2 = 1.$$

（2）若過原點兩直線與 x_1, x_2, x_3 軸的夾角分別為 (α, β, γ) 與 $(\alpha', \beta', \gamma')$ ，而且兩直線間夾角為 θ ，則

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' \qquad (3\text{-}6)$$

證明（3-6）式如下：兩直線上各選一點 P 與 P’，位置向量各為

$$\vec{r} = [r\cos\alpha, r\cos\beta, r\cos\gamma]，\quad \vec{r}' = [r'\cos\alpha', r'\cos\beta', r'\cos\gamma']$$

$$\vec{r}\cdot\vec{r}' = xx' + yy' + zz'$$
$$= rr'\cos\alpha\cos\alpha' + rr'\cos\beta\cos\beta' + rr'\cos\gamma\cos\gamma' = rr'\cos\theta$$
$$\Rightarrow \cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'.$$

現考慮座標系 (x_1, x_2, x_3) 對一通過原點的任意軸做旋轉而成 $\Rightarrow (x_1', x_2', x_3')$ ，而 $\lambda_{ij} = \cos(x'_i, x_j), j = 1..3.$ 則為 x'_i 軸在原座標系 (x_1, x_2, x_3) 的方向餘弦。由（3-5），因 x'_1 軸方向餘弦可得

$$\lambda_{11}^2+\lambda_{12}^2+\lambda_{13}^2=1 \qquad （3\text{-}7）$$

similarly, 由x'_2與x'_3可得$\lambda_{21}^2+\lambda_{22}^2+\lambda_{23}^2=1$與$\lambda_{31}^2+\lambda_{32}^2+\lambda_{33}^2=1$，連同上式可寫為

$$\sum_{j=1}^{3}\lambda_{1j}^2=\sum_j\lambda_{1j}\lambda_{1j}=1=\sum_j\lambda_{2j}\lambda_{2j}=\sum_j\lambda_{3j}\lambda_{3j} \qquad (3-8)$$

$$\Rightarrow\sum_j\lambda_{ij}\lambda_{kj}=1,\ if\ \ i=k. \qquad (3-9)$$

已知x'_1軸和x'_2在原座標系的方向餘弦分別為$(\lambda_{11},\lambda_{12},\lambda_{13})$與$(\lambda_{21},\lambda_{22},\lambda_{23})$，現由於$x'_1$與$x'_2$夾角為 90^o，所以可由（3-6）

$$\Rightarrow\lambda_{11}\lambda_{21}+\lambda_{12}\lambda_{22}+\lambda_{13}\lambda_{23}=\cos\theta=\cos\frac{\pi}{2}=0\Rightarrow\sum_j\lambda_{1j}\lambda_{2j}=0$$

由於x'_1與x'_3夾角為 90^o、x'_2與x'_3夾角亦為 90^o，所以

$$\sum_j\lambda_{1j}\lambda_{3j}=0=\sum_j\lambda_{2j}\lambda_{3j}=\sum_j\lambda_{1j}\lambda_{2j} \qquad (3-10)$$

$$\Rightarrow\sum_j\lambda_{ij}\lambda_{kj}=0,\ if\ \ i\neq k. \qquad (3-11)$$

合併（3-9）與(3-10) 與 kronecher delta，旋轉矩陣的元素有如下性質

$$\sum_j\lambda_{ij}\lambda_{kj}=\delta_{ik} \qquad （3\text{-}12）$$

（3-12）稱為旋轉矩陣元素的「正交條件 orthogonal condition」,是基於直角座標軸之間都是彼此正交（垂直）的。

一矩陣 A 被稱為「正交矩陣 orthogonal matrix」如果 $A^T=A^{-1}$。我們可以由（3-12）證明旋轉矩陣λ就是「正交矩陣」:

pf. $\because(\lambda\lambda^T)_{ij}=\sum_k\lambda_{ik}\lambda_{kj}^T=\sum_k\lambda_{ik}\lambda_{jk}=\delta_{ij}=1_{ij}$

且$(\lambda^T\lambda)_{ij}=\delta_{ij}\Rightarrow\lambda\lambda^T=\lambda^T\lambda=1\Rightarrow\lambda^T=\lambda^{-1}$ （$(\lambda^T\lambda)_{ij}=\delta_{ij}$自己回去證明）

＊ 幾種特殊的矩陣

$$
\begin{aligned}
&A = A^* \Leftrightarrow A: real \\
&A^T = A \Leftrightarrow A: symmetric \\
&A^T = -A \Leftrightarrow A: antisymmetric \\
&A^+ = A \Leftrightarrow A: Hermitian \\
&A^{-1} = A^T \Leftrightarrow A: orthogonal \\
&A^{-1} = A^+ \Leftrightarrow A: unitary \\
&A_{ij} = 0 \ \ if \ \ i \neq j, \ \ or \ \ A_{ij} = a_{ij}\delta_{ij} \Leftrightarrow A: diagonal \\
&A^2 = A \Rightarrow \left(A^n = A\right) \Leftrightarrow A: indepoten
\end{aligned}
$$

＊ 座標系統的 inversion：透過原點的反射(reflection),即所有 $x_i \to -x_i$ 。

$$
\begin{cases}
x_1^{'} = -x_1 \\
x_2^{'} = -x_2 \\
x_3^{'} = -x_3
\end{cases}
$$

所以 inversion 矩陣為

$$
\lambda_I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}，(\lambda_I)_{ij} = -\delta_{ij} \Rightarrow \lambda_I^T = \lambda_I^{-1} \Rightarrow \lambda_I \ \ orthogonal.
$$

注意：座標 inversion 的動作是不能經由座標旋轉的組合形成！i.e.,

$$
\lambda_I \neq \lambda_R \lambda'_R \ldots .
$$

其中 λ_R 表旋轉矩陣。可以證明 $\det \lambda_R = 1 \ \ and \ \ \det \lambda_I = -1$ ，所有的旋轉也稱為 proper rotation，而 inversion 則稱為 improper rotation。

座標旋轉在「純量」、「向量」的定義上是有意義的：考慮一個下列形式的座標轉換

$$
x_i^{'} = \sum_j \lambda_{ij} x_j \ \ with \ \ \sum_j \lambda_{ij}\lambda_{kj} = \delta_{ik}
$$

若一個量 φ 在這樣的座標轉換之下「不變」則 φ 為一純量，例如質量 $M(x', y', z') = M(x, y, z)$ 所以質量為一純量。若有一個量以集合 A＝ (A_1, A_2, A_3) 表現而當座標由 $\{x_i\} \xrightarrow{\lambda} \{x'_i\}$ 時 A 的分量也做相同的轉換

$$
A_i^{'} = \sum_j \lambda_{ij} A_j \Rightarrow \vec{A} = (A_1, A_2, A_3) \ \ is \ \ a \ \ vector.
$$

＊行列式的微分

$$A = A(x) \Rightarrow \det A = \sum \varepsilon_{ijk} A_{1i}(x) A_{2j}(x) A_{3k}(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}[\det A(x)] = \sum \varepsilon_{ijk} (A_{1i}' A_{2j} A_{3k} + A_{1i} A_{2j}' A_{3k} + A_{1i} A_{2j} A_{3k}')$$

$$ex.\ \frac{d}{dx}\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ e^x & 1 & 0 \\ \sin x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2x & 3x^3 \\ e^x & 1 & 0 \\ \sin x & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ e^x & 0 & 0 \\ \sin x & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ e^x & 1 & 0 \\ \cos x & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

§ 3-3　Eigenvalue problem 本徵值問題

一個任意的$A_{3\times3}$矩陣可視爲一個作用在任何一個3×1行向量

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

的「operator 算符」，作用如$A\bar{v} = \bar{u}$ ，i.e., A 作用在$\bar{v}$後將$\bar{v}$變成$\bar{u}$ 。例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

＊對應於一個給定的矩陣 A，有一組特別的向量$\bar{x}$具有一特性：

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x},\ \lambda \text{ 爲一常數}$$

$\Rightarrow \bar{x} \equiv$矩陣 A 的"對應於「eigenvalue 本徵值」λ"的「本徵向量 eigenvector」。換言之，當矩陣A作用在自己的 eigenvector 時只會將 eigenvector 放大λ倍，而這個放大的倍數稱爲 eigenvalue. 例如

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$就是矩陣$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$的 eigenvector, $\because \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

對應的「本徵值」與「本徵向量」是相互聯繫的；每一個 A 的本徵向量只對應一個本徵值，但是對於某些「本徵值」有可能一個「本徵值」有多於一個「本徵向量」與之對應。

給定一個矩陣，要如何計算其對應的本徵值與本徵向量？請見下列例子：

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}，令\ \bar{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A-\lambda 1)\bar{x}=\begin{pmatrix}1-\lambda & -1\\ -1 & 1-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$$

要避免 trivial solution $x_1=x_2=0$ 則前面的矩陣行列式必須爲 0

$$\Rightarrow \det(A-\lambda 1)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & -1\\ -1 & 1-\lambda\end{pmatrix}=0$$
$$\Rightarrow (1-\lambda)^2-1=(1-\lambda-1)(1-\lambda+1)=-\lambda(2-\lambda)=0$$
$$\Rightarrow \lambda=0,\ 2\equiv\lambda_1,\ \lambda_2$$

上式在解 λ 時所導入的方程式 $\det(A-\lambda 1)=0$ 叫做 secular equation(久期方程式)。

對於本徵值 $\lambda_1=0,\ let\ \bar{x}_1=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a-b\\ -a+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow a=b\Rightarrow let\ a=1=b\Rightarrow \bar{x}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$
$$check:\ \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

長度＝1 的向量稱做「歸一化的 normalized」向量。我們通常希望所得的本徵向量是歸一化的，歸一化的 $\bar{x}_1$ 就是原 $\bar{x}_1$ 將自己的長度除掉

$$\bar{x}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow|\bar{x}_1|=1\ 。$$

對於本徵值 $\lambda_2=2,\ let\ \bar{x}_2=\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ -1 & 1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -c-d \\ -c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c = -d \Rightarrow c = 1 \Rightarrow d = -1 \Rightarrow \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$check: \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$normalized\ \ \vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{x}_2| = 1.$$

所以，$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 0$，$\vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$； $\lambda_2 = 2$，$\vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ex. Find eigenvalues for $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$From\ \ (A - \lambda 1)\vec{x} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 = -\lambda\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\lambda \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda[-\lambda(1-\lambda)+1] = -\lambda[\lambda^2 - \lambda + 1]$$

$$\Rightarrow \lambda = 0, \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

這也讓我們看到一個「實矩陣」是可能有「複數」的本徵值。

＊ 由於解「本徵值」時要解一個久期方程式

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} = 0$$

所以對於一個$n \times n$的矩陣最多可以解出 n 個複根，但是常會遇到重根的 case，那些重根的λ稱爲「簡併的 degenerate」本徵值。如果λ是 m 重根，則λ爲「m 重簡併 m-fold degenerate」。「簡併的」本徵值所對應的本徵向量也稱爲「簡併的本徵向量」。

Ex. Find eigenvalues and eigenvectors for $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

$$Sol.\ \det\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0=(1-\lambda)(3-\lambda)+1=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=2$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1-2 & 1\\ -1 & 3-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1-x_2=0\\ -x_1+x_2=0\end{cases}\Rightarrow x_1=x_2$$

$$\Rightarrow\vec{x}_1=\vec{x}_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$check:\ \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

ex. Find eigenvalues and eigenvectors for $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

$$Sol:\Rightarrow\det\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=0=-\lambda\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -\lambda\\ 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&=-\lambda(\lambda^2-1)+(\lambda+1)+(1+\lambda)\\ &=-\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)+2(\lambda+1)\\ &=(\lambda+1)[2-\lambda^2+\lambda]\\ &=(\lambda+1)(-\lambda+2)(\lambda+1)\\ &=(-\lambda+2)(\lambda+1)^2=0\\ &\Rightarrow\lambda=2,-1,-1\equiv\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3.\end{aligned}$$

For 非簡併本徵值$\lambda_1=2$

$$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=0 & (1)\\ x_1-2x_2+x_3=0 & (2)\\ x_1+x_2-2x_3=0 & (3)\end{cases}\quad (2),(3)\Rightarrow 2x_1-x_2-x_3=0$$

$$(1)-(2)\Rightarrow -3x_1+3x_2=0\Rightarrow x_1=x_2\ \therefore choose\ x_1=1=x_2$$

$$\Rightarrow\vec{x}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{x}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

For 簡併本徵値$\lambda_2 = \lambda_3 = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

$$\Rightarrow choose \;\; y_1 = 1, y_2 = -1, y_3 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$or \;\; choose \;\; y_1 = 1, y_2 = 0, y_3 = -1$$

$$\Rightarrow \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

總結：

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2, \;\; \vec{x}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1, \;\; \vec{x}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \;\; \vec{x}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

我們注意到$\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = 0 \;\; and \;\; \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_3 = 0$但是簡併本徵向量之間卻不彼此正交，不過我們可以透過所謂的「Gram-Schmit 過程」使得到一組相互正交的簡併本徵向量。

∗ 向量的內積(inner product, or, dot product) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

考慮 2 個行向量

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \;\; \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

定義$\vec{a}, \vec{b}$間的內積爲

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv \vec{a}^{+} \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1^*, & a_2^*, & a_3^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \sum_i a_i^* b_i$$

＊ 2 個向量的內積若爲 0, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$,稱向量 $\vec{a},\vec{b}$ 相互垂直（正交 orthogonal）。

＊ Gram-Schmit 過程：一個將一組 n 個彼此不平行（但不必彼此垂直）的向量建構成一組 n 個彼此垂直向量的方法。先考慮一組 2 個不平行向量 $\{\vec{a},\vec{b};\ \vec{a}\neq c\vec{b}, c$ 爲一常數$\}$，所以向量 $\vec{b}$ 可以分解爲平行與垂直 $\vec{a}$ 的分量：

$$\begin{aligned}
&\vec{b}=\vec{b}_{//}+\vec{b}_{\perp}\Rightarrow\vec{b}_{\perp}=\vec{b}-\vec{b}_{//}\\
&\because\vec{b}_{//}=(\vec{b}\cdot\hat{a})\hat{a}\\
&\Rightarrow\vec{b}_{\perp}=\vec{b}-(\vec{b}\cdot\hat{a})\hat{a}\\
&\Rightarrow\{\vec{a},\vec{b}_{\perp}\}:\ an\ orthogonal\ set.
\end{aligned}$$

上式中出現的 $\hat{a}$ 爲向量 $\vec{a}$ 方向的「單位向量」$\hat{a}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{\vec{a}}{\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}}$ 。

再考慮 3 個不相互垂直的向量集合 $\{\vec{a},\vec{b}',\vec{c}\}$，我們可以先用 Gram-Schmit 由 $\vec{b}'$ 建構 $\vec{b}$ 使得 $\vec{a}\perp\vec{b}$，於是 $\vec{c}$ 可以分解爲平行 $\vec{a},\vec{b}$ 的分量加上同時垂直於 $\vec{a},\vec{b}$ 的分量

$$\begin{aligned}
&\vec{c}=\vec{c}_{\perp}+\vec{c}_a+\vec{c}_b\\
&\Rightarrow\vec{c}_a=(\vec{c}\cdot\hat{a})\hat{a},\ \vec{c}_b=(\vec{c}\cdot\hat{b})\hat{b}\\
&\Rightarrow\vec{c}_{\perp}=\vec{c}-\vec{c}_a-\vec{c}_b\Rightarrow\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}_{\perp}\}\ an\ orthogonal\ set.
\end{aligned}$$

4 個以上的向量集合也模仿上面照章辦理。

Ex. 由 $\left\{\vec{x}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\vec{x}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\vec{x}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$ 建構一組正交集。

解：可以看出 $\vec{x}_1\perp\vec{x}_2$

$$\vec{x}_{31} \equiv (\vec{x}_3 \cdot \hat{x}_1)\hat{x}_1 = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_{32} \equiv (\vec{x}_3 \cdot \hat{x}_2)\hat{x}_2 = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x}_{3\perp} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\0-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\-1-0-0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_{3\perp} \perp \vec{x}_1 \text{ and } \vec{x}_2$$

＊ 定理：Hermitian 矩陣 A 的本徵值必全爲實數，

i.e., $if\ \ A^+ = A,\ and\ \ A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Rightarrow \lambda \in R.$

Pf. 先讓本徵向量 $\vec{x}$ 爲歸一化的向量：$|\vec{x}|^2 = \vec{x}\cdot\vec{x} = 1$

$$for\ \ A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Rightarrow (A\vec{x})^+ = (\lambda\vec{x})^+$$

$$\Rightarrow \vec{x}^+A^+ = \lambda^*\vec{x}^+\ \ (\because (\lambda\cdot 1)^+ = \lambda^*\cdot 1)$$

$$from\ \ \vec{x}\cdot(A\vec{x}) = \vec{x}^+A\vec{x} = \vec{x}^+(A\vec{x}) = \lambda\vec{x}\cdot\vec{x} = \lambda$$

$$also\ \ \vec{x}^+A\vec{x} = (\vec{x}^+A)\vec{x} = \lambda^*\vec{x}^+\vec{x} = \lambda^*\vec{x}\cdot\vec{x} = \lambda^*$$

$$\therefore \lambda = \lambda^* \Rightarrow \lambda \in R.$$

＊ 定理：若 A 爲 Hermitian 且 $\begin{cases}A\vec{x}_1 = \lambda_1\vec{x}_1\\ A\vec{x}_2 = \lambda_2\vec{x}_2\end{cases},\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \vec{x}_1\cdot\vec{x}_2 = 0,\ i.e.,\ \vec{x}_1 \perp \vec{x}_2$

pf. 由 $A\vec{x}_1 = \lambda_1\vec{x}_1$

$$\Rightarrow \vec{x}_2\cdot A\vec{x}_1 = \lambda_1\vec{x}_2\cdot\vec{x}_1$$

$$also\ \ \vec{x}_2\cdot A\vec{x}_1 = \vec{x}_2^+A\vec{x}_1 = (\vec{x}_2^+A)\vec{x}_1 = \lambda_2^*\vec{x}_2^+\vec{x}_1 = \lambda_1\vec{x}_2\cdot\vec{x}_1$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\vec{x}_2\cdot\vec{x}_1 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{x}_2\cdot\vec{x}_1 = 0\ \ (\because \lambda_1 \neq \lambda_2)$$

$$\therefore \vec{x}_2 \perp \vec{x}_1$$

習題

1. Evaluate the following determinants

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{(c)} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Test the set of linear homogeneous equations

$$x + 3y + 3z = 0,$$
$$x - y + z = 0,$$
$$2x + y + 3z = 0,$$

to see if it possesses a nontrivial solution.

3. Given the pair of equations

$$x + 2y = 3,$$
$$2x + 4y = 6,$$

(a) Show that the determinant of the coefficients vanishes.
(b) Show that the numerator determinants (Eq. (3.18)) also vanish.
(c) Find at least two solutions.

4. (a) The matrix equation $\mathsf{A}^2 = 0$ does not imply $\mathsf{A} = 0$. Show that the most general 2×2 matrix whose square is zero may be written as

$$\begin{pmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{pmatrix},$$

where a and b are real or complex numbers.
(b) If $\mathsf{C} = \mathsf{A} + \mathsf{B}$, in general

$$\det \mathsf{C} \neq \det \mathsf{A} + \det \mathsf{B}.$$

Construct a specific numerical example to illustrate this inequality.

5. Given

$$\mathsf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

show that

$$\mathsf{K}^n = \mathsf{KKK} \cdots (n \text{ factors}) = 1$$

(with the proper choice of n, $n \neq 0$).

6. Show that $(\mathsf{AB})^\dagger = \mathsf{B}^\dagger \mathsf{A}^\dagger$.

7. Matrix C is *not* Hermitian. Show that $C + C^\dagger$ and $i(C - C^\dagger)$ are Hermitian. This means that a non-Hermitian matrix may be resolved into two Hermitian parts

$$C = \frac{1}{2}(C + C^\dagger) + \frac{1}{2i}i(C - C^\dagger).$$

This decomposition of a matrix into two Hermitian matrix parts parallels the decomposition of a complex number z into $x + iy$, where $x = (z + z^*)/2$ and $y = (z - z^*)/2i$.

8. Find the eigenvalues and orthonomal eigenvectors for the following matries.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ *ANS.* $\lambda = 0, 1, 2.$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ *ANS.* $\lambda = -1, 0, 2.$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$ *ANS.* $\lambda = -1, 1, 2.$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{8} & 0 \\ \sqrt{8} & 1 & \sqrt{8} \\ 0 & \sqrt{8} & 1 \end{pmatrix}.$$ *ANS.* $\lambda = -3, 1, 5.$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$ *ANS.* $\lambda = 0, 1, 2.$

9. (a) Determine the eigenvalues and eigenvectors of

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}.$$

Note that the eigenvalues are degenerate for $\varepsilon = 0$ but the eigenvectors are orthogonal for all $\varepsilon \neq 0$ and $\varepsilon \to 0$.

(b) Determine the eigenvalues and eigenvectors of

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note that the eigenvalues are degenerate for $\varepsilon = 0$ and for this (non-symmetric) matrix the eigenvectors ($\varepsilon = 0$) do *not* span the space.

(c) Find the cosine of the angle between the two eigenvectors as a function of ε for $0 \leq \varepsilon \leq 1$.

10. Find the transformation matrix which rotates a rectangular coordinate system through an angle of 120° about an axis making equal angles with the original three coordinate axes

11. Let U be a unitary matrix and let x_1, x_2 be two eigenvectors of U belonging to the eigenvalues λ_1, λ_2, respectively. Show that
(*a*) $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$
(*b*) If $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $x_1^\dagger x_2 = 0$

12. Find the eigenvalues and normalized eigenvectors of the matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Express your answers numerically (3 significant figures).