電磁學(Electricity and Magnetism)

靜電學(Electrostatics)

- 電力與電場
- 電力線與高斯定律
- 電位能與電位

電力與電場(Electrostatic Force and Electric Field)

電力與基本力(Electric Force and The fundamental forces of nature)

物理學家相信我們的宇宙存在的基本作用力只有四種：重力(**或稱萬有引力，**the gravitational force)**、電磁力**(the electromagnetic force)**、弱作用力**(the weak nuclear force)**、強作用力**(the strong nuclear force)**。其中電磁力和弱作用力近代物理學家已經可以用一統一的理論架構來描述，即弱電作用**(electroweak force)**理論，就如同馬克斯威爾將電力與磁力用電磁理論作一統一的描述一樣。**

電磁學

下面我們簡單的描述個基本作用力之簡單特性：

(1) 重力(或萬有引力)

具有質量物體間之引力，大小和二作用物體之質量乘積成正比，和距離平方成反比。

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$G = 6.67\times10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$

(2) 電磁力

電荷或磁極間之作用力，和相對速度有關。在靜止時之靜電交互作用和二物體所帶之電荷乘積成正比，距離平方成反比。且電荷分成兩種(定義為正電和負電)，同性電相斥，異性電相吸。

$$F_e = k_e\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$k_e = 8.99\times10^{9}\ \mathrm{Nm^2/C^2}$

電磁學

我們日常生活所碰到的現象及力的作用，除了重力以外，均是電磁作用的結果，例如化學反應、生命現象、摩擦力、張力等。

電磁作用力還造成人們對時間和空間觀念的革命，產生相對論。

重力與電磁力均是所謂的*長程力(long-range force)*，對應於核力只作用在核子之範圍稱為*短程力(short-range force)*。

例題 比較氫原子中原子核和電子間電力和重力之大小。

考慮在基態之電子，其與核之距離為0.53埃。

$$F_g = 6.67\times10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}\times\frac{(1.67\times10^{-27}\,\mathrm{kg})(9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg})}{(0.53\times10^{-10}\,\mathrm{m})^2} = 3.61\times10^{-47}\,\mathrm{N}$$

$$F_e = 8.99\times10^{9}\,\mathrm{Nm^2/C^2}\times\frac{(1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C})^2}{(0.53\times10^{-10}\,\mathrm{m})^2} = 8.19\times10^{-8}\,\mathrm{N}$$

$$\boxed{\frac{F_e}{F_g} = 2.3\times10^{39}}$$

既然電磁力遠遠大於重力，為什麼星球間之作用力卻以重力為主？

電磁學

(3) **弱作用力**
和某些原子核之不穩定和衰變(例如β-decay，即自發的放出電子)有關，大小約較電磁力弱10^{12}倍，較重力強10^{25}倍。

(4) **強作用力**
負責將原子核中之帶電質子緊密的結合在一起、克服強大的電磁力的作用力。其作用範圍很小，但在作用之範圍內強度很大。距離在10^{-15} m(即原子核的大小)時，強作用力的強度約比電磁力大兩個數量級；但距離在10^{-14} m時，其強度幾乎可完全忽略。

(有些)物理學家的夢想：找到一個統一的理論(the Grand Unified Theory，簡稱GUT)描述四種基本作用力。有了這理論，物理學家便可瞭解宇宙的最初狀態。

Theory of Everything!!!???

電磁學

庫侖定律與電荷(Coulomb's Law and Charge)

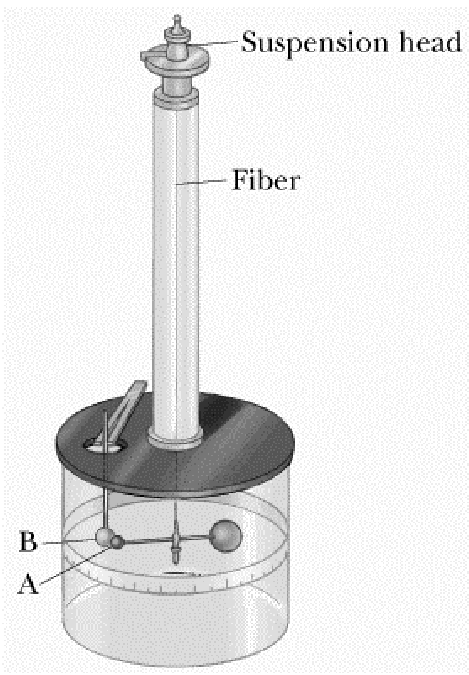
庫侖定律描寫靜電荷間之作用力：

$$\mathbf{F}_e = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{4pe_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

$$k_e = \frac{1}{4pe_0} = 8.9875\times10^{9}\ \ \mathrm{N\cdot m^2/C^2}$$

$$e_0 = 8.8542\times10^{-12}\ \ \mathrm{C^2/N\cdot m^2}$$

permittivity constant

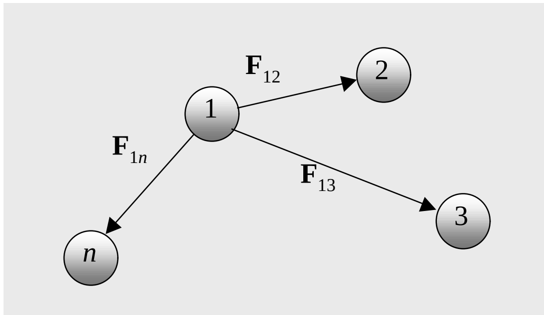


Charles Coulomb (1736-1806)

電磁學

$$\mathbf{F}_1=\mathbf{F}_{12}+\mathbf{F}_{13}+\ldots+\mathbf{F}_{1n}$$

一電荷受許多電荷之總電力係個別電力之向量和。（合乎重疊原理！）



***電荷**(Charge)*

(1)**電荷分為兩種** **正**(positive) **質子、正子**

負(negative) **電子**

(2)**電荷是非連續的，是不可無限分割的，是量子化的**(Quantized)。

1**基本電荷***e* (elementary charge)=1.60219×10^{-19} coulomb(C)

1 C= 6.25×10^{18} *e*

(3)**宇宙的淨電荷守恆。**

任何反應或過程總電荷守恆。Charge is conserved!

$e^-+e^+\rightarrow\gamma+\gamma$

$\gamma\rightarrow e^-+e^+$

電磁學

電場(Electric Field)

場(field)→**一種分布**(distribution)

力場(force field)→**一種向量場**(vector field)

電場(electric field)→**電力場→帶電物體所受電力的分布**

電場定義為單位正電荷(點電荷)所受之電力(由於空間中其他電荷分布)。

$$\mathbf{E}\equiv\frac{\mathbf{F}}{q_t}$$ **單位：**[N/C]

q_t**測試電荷**(test charge)

•**電力以外的作用力要很小**

•**不影響其他電荷的分布**

•**體積小，即點電荷**(point charge)

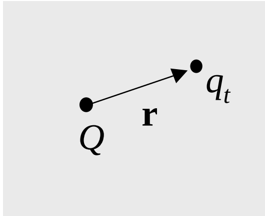
$$\mathbf{F}(\mathbf{r})=q\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

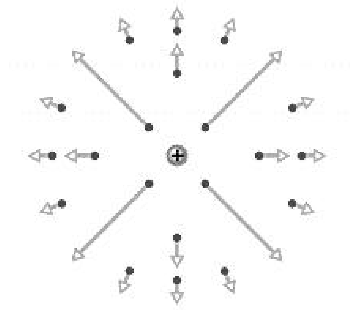
力　分布　和力場感應的特性　力場

電磁學

(1) **點電荷所產生之電場**

$$\mathbf{F}=\frac{1}{4pe_0}\frac{Qq_t}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad \mathbf{E}=\frac{1}{4pe_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$





電場方向Q>0 $\hat{\mathbf{r}}$

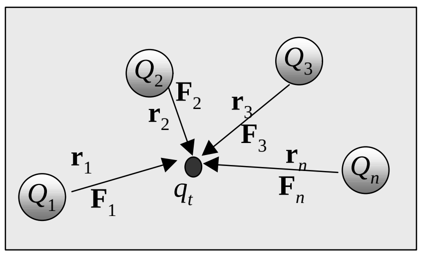
Q<0 $-\hat{\mathbf{r}}$

電場大小 $E \propto Q, \frac{1}{r^2}$

(2) **電荷分布所產生之電場**

$$\mathbf{F}=\frac{q_t}{4pe_0}\left[\frac{Q_1}{r_1^2}\hat{\mathbf{r}}_1+\frac{Q_2}{r_2^2}\hat{\mathbf{r}}_2+\frac{Q_3}{r_3^2}\hat{\mathbf{r}}_3+\cdots+\frac{Q_n}{r_n^2}\hat{\mathbf{r}}_n\right]=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i$$

$$\mathbf{E}=\frac{\mathbf{F}}{q_t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbf{F}_i}{q_t}=\frac{1}{4pe_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{r_i^2}\hat{\mathbf{r}}_i$$



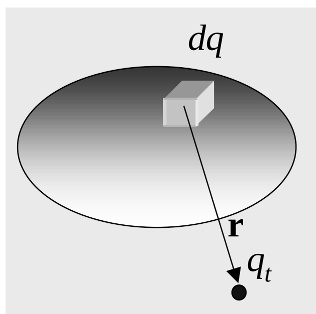
電磁學

假如為連續分布： $Q_i \rightarrow dq,\ \Sigma \rightarrow \int$

$$d\mathbf{E}=\frac{1}{4pe_0}\frac{dq}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{E}=\int d\mathbf{E}=\int\frac{1}{4pe_0}\frac{dq}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

$$dq=\begin{cases} l\,ds & \text{for line distribution} \\ s\,dA & \text{for area distribution} \\ r\,dV & \text{for volume distribution} \end{cases}$$



l [C/m] linear charge density

s [C/m²] surface (areal) charge density

r [C/m3] volume charge density

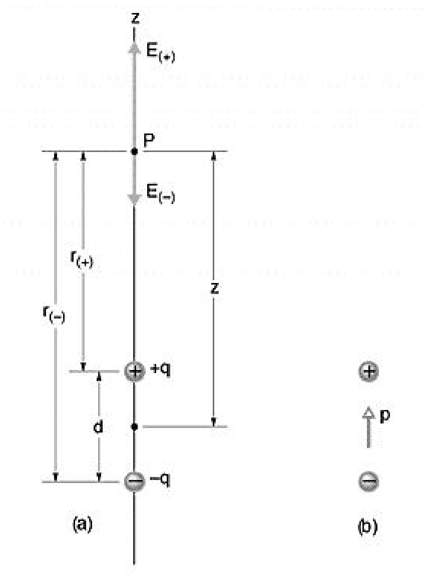
例題 **電偶極**(electric dipole)**的電場**

$$\mathbf{E} = E_z \hat{\mathbf{z}}$$

$$E_z = E_{(+)} - E_{(-)} = \frac{1}{4pe_0}\frac{q}{r_{(+)}^2} - \frac{1}{4pe_0}\frac{q}{r_{(-)}^2}$$

$$= \frac{1}{4pe_0}\frac{q}{(z-\frac{1}{2}d)^2} - \frac{1}{4pe_0}\frac{q}{(z+\frac{1}{2}d)^2}$$

$$= \frac{1}{4pe_0}\frac{q}{z^2}\left[\left(1-\frac{d}{2z}\right)^{-2} - \left(1+\frac{d}{2z}\right)^{-2}\right]$$



若$z>>d$**，即**$d/2z<<1$**，上式可簡化**

$$E_z = \frac{1}{4pe_0}\frac{q}{z^2}\left[\left(1-\frac{d}{2z}\right)^{-2} - \left(1+\frac{d}{2z}\right)^{-2}\right] \approx \frac{1}{4pe_0}\frac{q}{z^2}\left[\left(1+\frac{2d}{2z}+\cdots\right) - \left(1-\frac{2d}{2z}+\cdots\right)\right]$$

$$\approx \frac{1}{4pe_0}\frac{q}{z^2}\cdot\frac{2d}{z} = \frac{1}{2pe_0}\frac{qd}{z^3}$$

定義電偶極(electric dipole)**為** $\mathbf{p} \equiv qd\hat{\mathbf{z}}$

電偶極方向為負電荷指向正電荷之方向。故

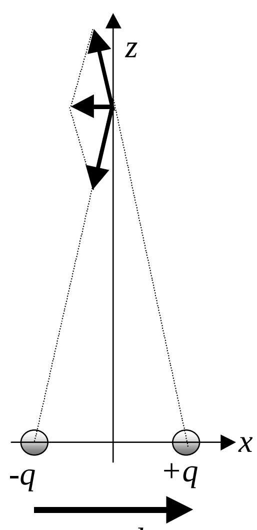
$$\mathbf{E} = E_z\hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{2pe_0}\frac{qd}{z^3}\hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{2pe_0}\frac{\mathbf{p}}{z^3} \propto z^{-3}$$

假如考慮沿二電荷中垂線方向之電場可得

$$\mathbf{E} = E_x\hat{\mathbf{x}} = -\frac{1}{4pe_0}\frac{qd}{\left[z^2+(d/2)^2\right]^{3/2}}\hat{\mathbf{x}} = -\frac{1}{4pe_0}\frac{\mathbf{p}}{\left[z^2+(d/2)^2\right]^{3/2}}$$

若$z>>d$**，上式可簡化**

$$\mathbf{E} = E_x\hat{\mathbf{x}} \approx -\frac{1}{4pe_0}\frac{\mathbf{p}}{z^3} \propto z^{-3}$$



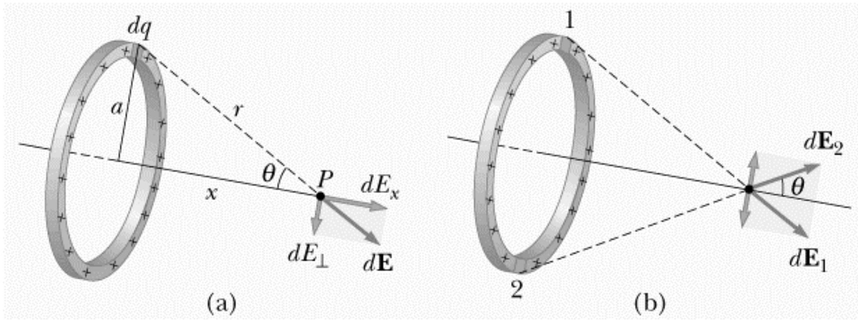
一般而言，不管dipole**之方向，電場強度均和**z^3**成反比。**

例題　**帶電環**(charged ring)**之電場**

$$dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda ds}{r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda ds}{\left(x^2+a^2\right)}\qquad \mathbf{E}=E_x\hat{\mathbf{x}}$$

$$dE_x=dE\cos\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda ds}{\left(x^2+a^2\right)}\cdot\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{1/2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda x ds}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}$$

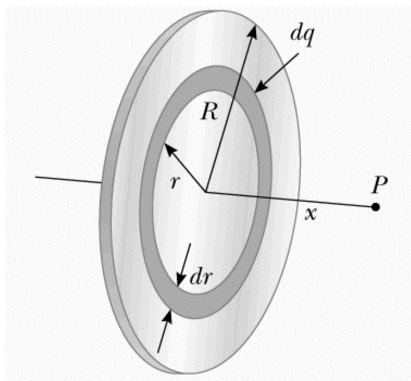
$$E_x=\int dE_x=\int dE\cos\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda z}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}\int ds=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda x\cdot 2\pi a}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}$$



若$x>>a$，$E_z\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x^2}$ ，和點電荷相同

若$x<<a$，$E_z\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{a^3}$

例題　**帶電盤**(charged disk)**之電場**



$$\mathbf{E}=E_x\hat{\mathbf{x}}\qquad dq=\sigma dA=\sigma\cdot 2\pi r dr$$

$$dE_x=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{xdq}{\left(x^2+r^2\right)^{3/2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\sigma 2\pi r dr}{\left(x^2+r^2\right)^{3/2}}$$

$$E_x=\int dE_x=\int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{xdq}{\left(x^2+r^2\right)^{3/2}}=\int_0^R\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\sigma 2\pi r dr}{\left(x^2+r^2\right)^{3/2}}$$

Let $U=x^2+r^2, dU=2rdr$

電磁學

$$E_x = \int_{x^2}^{x^2+R^2} \frac{1}{4pe_0}\frac{xspdU}{U^{3/2}} = \frac{xs}{4e_0}\left[-\frac{2}{U^{1/2}}\right]_{x^2}^{x^2+R^2}$$

$$E_x = \frac{s}{2e_0}\left(\frac{x}{|x|}-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$$

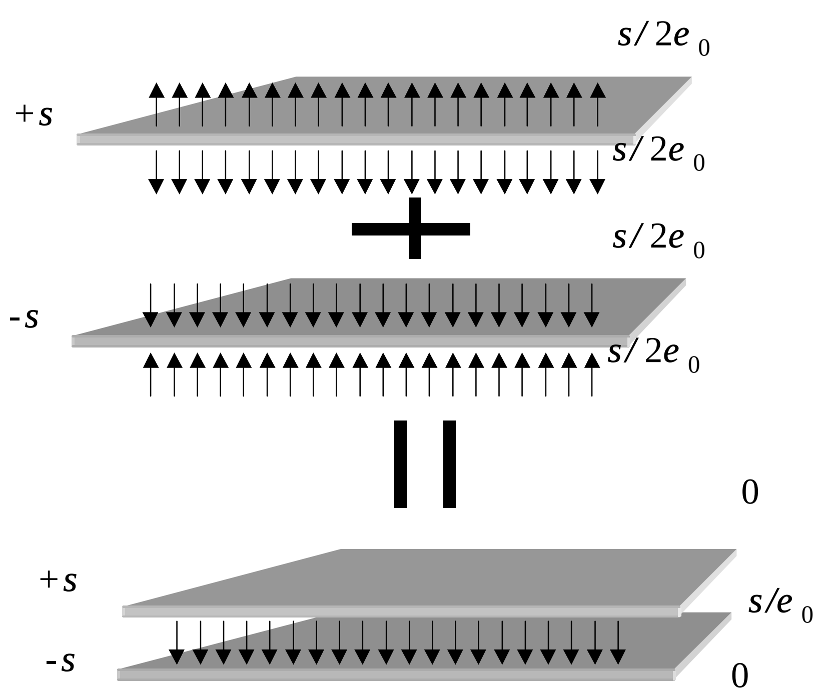
若$x>>R$**，** $$E_x = \frac{s}{2e_0}\left[1-\left(1+\frac{R^2}{x^2}\right)^{-1/2}\right] \approx \frac{s}{2e_0}\left[1-\left(1-\frac{1}{2}\frac{R^2}{x^2}+\cdots\right)\right]$$

$$E_x \approx \frac{sR^2}{4e_0x^2} = \frac{spR^2}{4pe_0x^2} = \frac{sA}{4pe_0x^2} = \frac{q}{4pe_0x^2}$$ **，和點電荷相同**

若$x<<R$**，** $$E_z \approx \begin{cases} \dfrac{s}{2e_0} & x>0 \\ -\dfrac{s}{2e_0} & x<0 \end{cases}$$ ***，和**x**大小無關，和面電荷密度成正比。***

電磁學

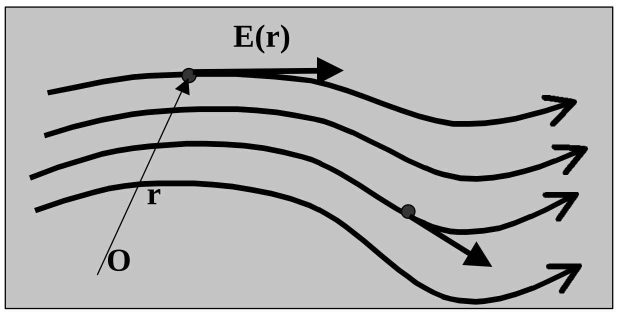
二平行帶電板



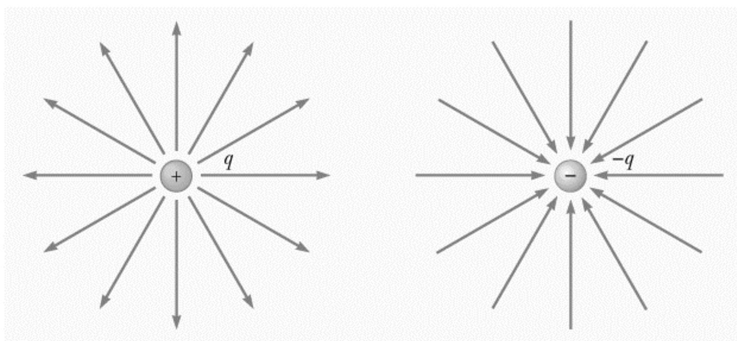
電力線與高斯定律

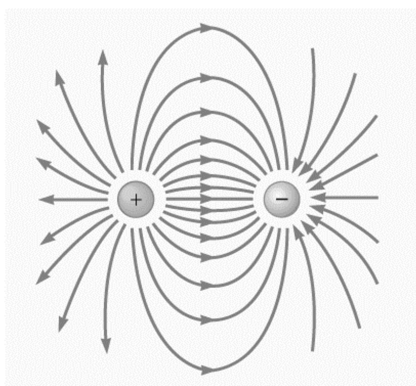
電力線(electric field lines)與電通量(electric flux)

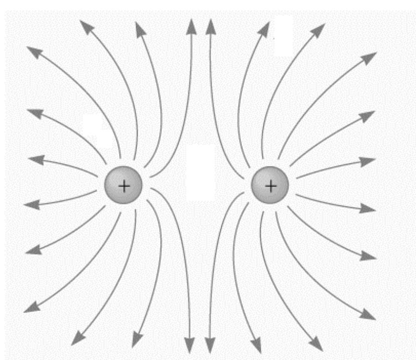
電力線的定性描述：電力線是用來將抽象的電場圖像化的工具，發明人為法拉第。

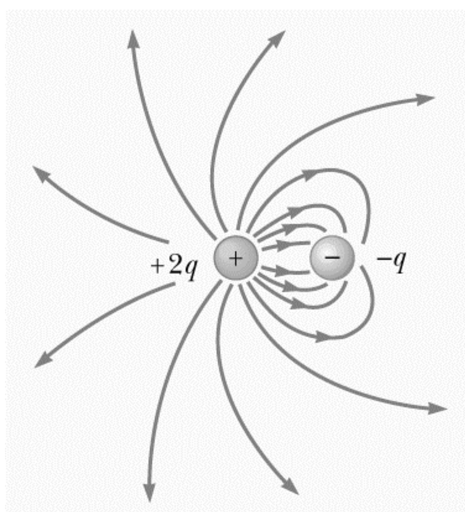


(1) **電力線的方向和當地的電場方向相同；**
(2) **電力線在空間中是連續的；**
(3) **電力線在空間中是不互相交叉的；**
(4) **電力線由正電荷開始，終止於負電荷；**
(5) **電場愈大，則電力線愈密。**
（或說電荷愈大，所對應之電力線愈多。）









電力線的定量描述：電通量

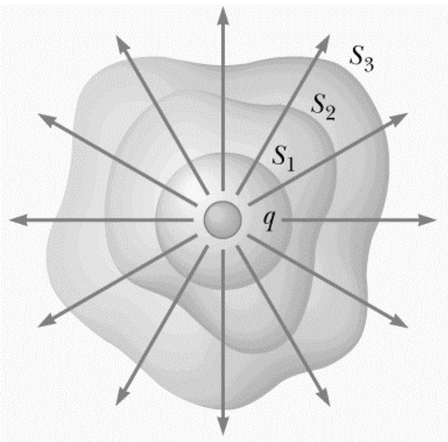
通過某截面之電力線數≡電通量(electric flux)$\Phi \propto q$

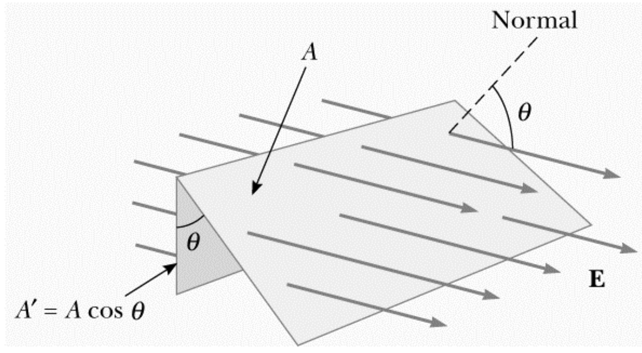
令比例常數為$1/e_0$

即

$$\Phi = \frac{q}{e_0}$$

單位：[Nm^2/C]





電通量密度與電場

由前面討論電通量之特性知

$$E \propto \frac{\Phi}{A}$$

比例常數為一無單位之常數

[N/C]=[Nm^2/C 1/m^2]

考慮一點電荷

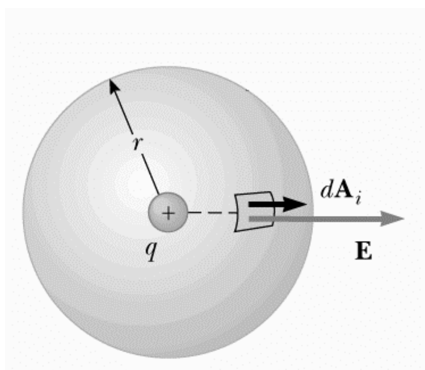
$$E = \frac{1}{4pe_0}\frac{q}{r^2}$$

由q**射出之電通量為**

$$\Phi = \frac{q}{e_0}$$

在半徑為r**之球面上**

$$\frac{\Phi}{A} = \frac{\Phi}{4pr^2} = \frac{q}{4pe_0 r^2} = E$$



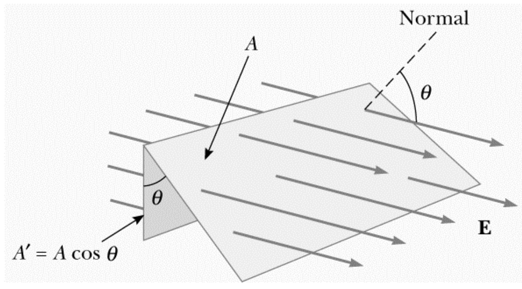
比例常數為1

電磁學

一般而言 $E=\dfrac{\Phi}{A}$ **或** $E=\dfrac{d\Phi}{dA_{\perp}}$

注意：$dA_{\perp}$**是和電通量方向(即電場方向)垂直之平面面積。**

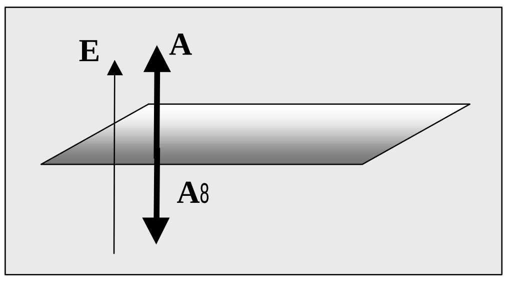
$$d\Phi = E dA_{\perp} = E dA\cos\theta$$
$$= \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}$$
$$\Phi_A = \int_A d\Phi = \int_A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}$$



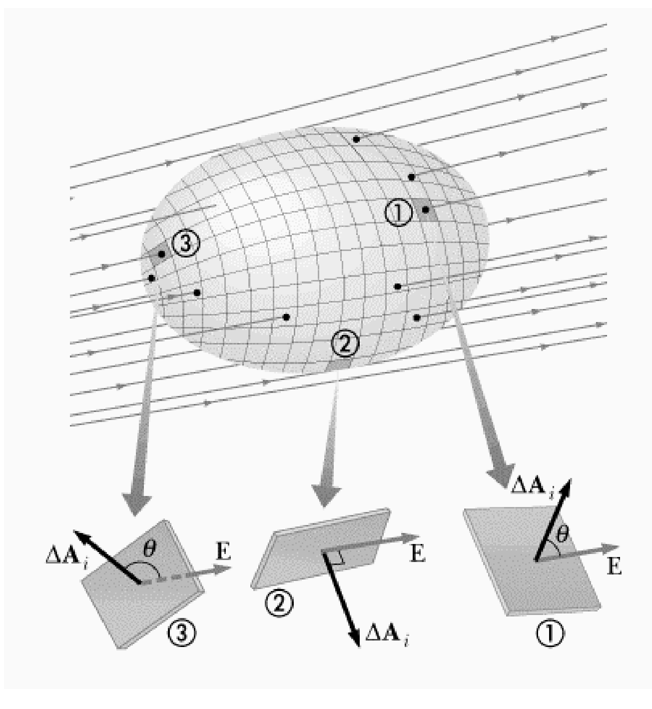
注意面的方向性：

$\Phi_A = \mathbf{E}\cdot\mathbf{A} > 0$

$\Phi_{A'} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{A'} < 0$



電磁學



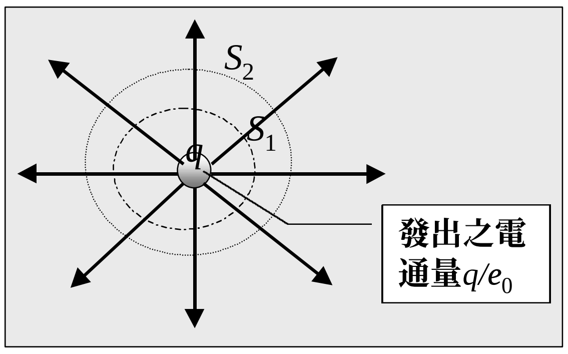
電磁學

高斯定律(Gauss's Law)

寫下高斯定律前，我們先看一些例子。

例題

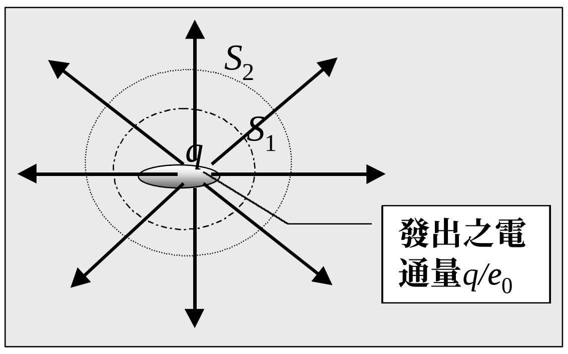
通過封閉面S_1、S_2**之電通量均為**q/e_0



例題

通過封閉面S_1、S_2**之電通量均為**q/e_0

和q**在內之分布情形無關。**



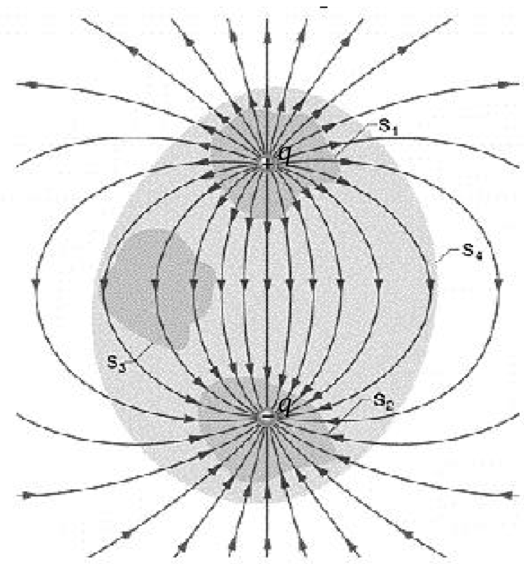
電磁學

例題

$$\Phi_{S_1} = +\frac{q}{e_0}$$

$$\Phi_{S_2} = -\frac{q}{e_0}$$

$$\Phi_{S_3} = \Phi_{S_4} = 0$$



綜合上面討論，我們可以寫下高斯定律：

$$\boxed{e_0\Phi = e_0\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = q_{\text{enc}}}$$

電磁學

高斯定律之應用

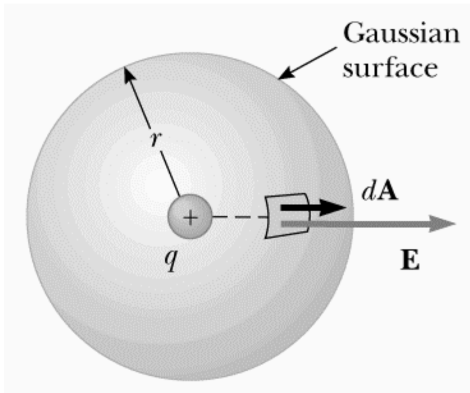
注意事項：

(a)**應用範圍：具對稱性的電荷分布**
(b)**高斯面的選取：電通量密度相同者**
電通量為零者

例題 **點電荷——庫侖定律之再現**

$$\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{r}}$$

$$\frac{q}{e_0} = \oint_{S(r)} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \oint_{S(r)} E\hat{\mathbf{r}}\cdot dA\hat{\mathbf{r}} = E\oint_{S(r)} dA$$
$$= E\cdot 4pr^2$$
$$E = \frac{1}{4pe_0}\frac{q}{r^2}$$



電磁學

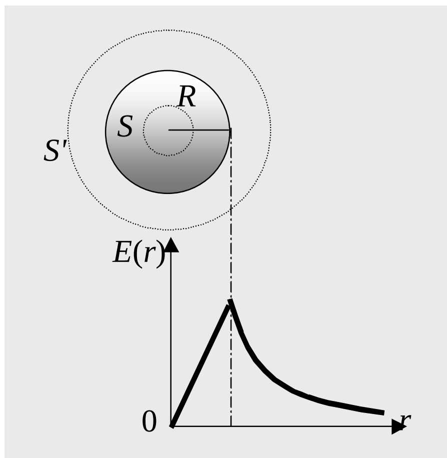
例題 **球形對稱**(spherical symmetry)**分布**

高斯面均取球形

例如一均勻帶電球

(a)**當**$r<R$
取高斯面S

$$\frac{Q_S}{e_0} = \frac{Q}{e_0}\frac{\frac{4}{3}pr^3}{\frac{4}{3}pR^3}$$
$$= \oint_{S(r)} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = E\oint_{S(r)} dA = E\cdot 4pr^2$$
$$E(r) = \frac{1}{4pe_0}\frac{Q_S}{r^2} = \frac{1}{4pe_0}\frac{Q}{R^3}r \propto r$$



(b)**當**$r<R$**，取高斯面**S'

$$\frac{Q_{S'}}{e_0} = \frac{Q}{e_0} = \oint_{S'(r)} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = E\cdot 4pr^2$$
$$E(r) = \frac{1}{4pe_0}\frac{Q}{r^2} \propto r^{-2}$$

和點電荷結果相同

電磁學

均勻帶電之薄球殼

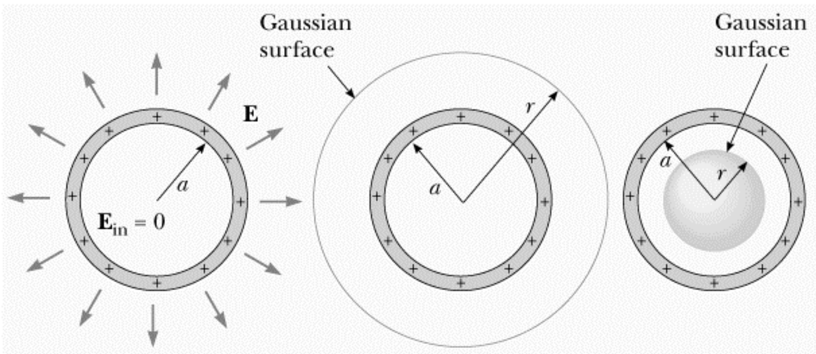
當$r>a$**，**

$$\frac{Q}{e_0} = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = E\cdot 4pr^2$$

$$E(r) = \frac{1}{4pe_0}\frac{Q}{r^2} \propto r^{-2}$$

當$r<a$**，**

$$E = 0$$



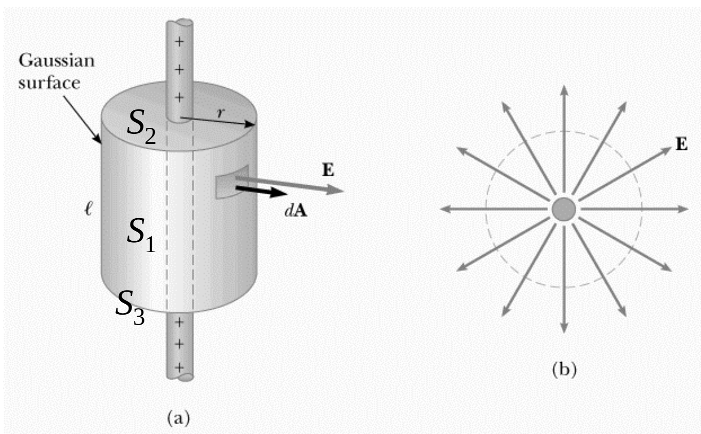
電磁學

例題 **圓柱形對稱**(cylindrical symmetry)**分布**

$$\Phi = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} + \Phi_{S_3} = \Phi_{S_1}$$

$$= \oint_{S_1}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = E\oint_{S_1} dA = E(2pr\ell) = \frac{l\,\ell}{e_0}$$

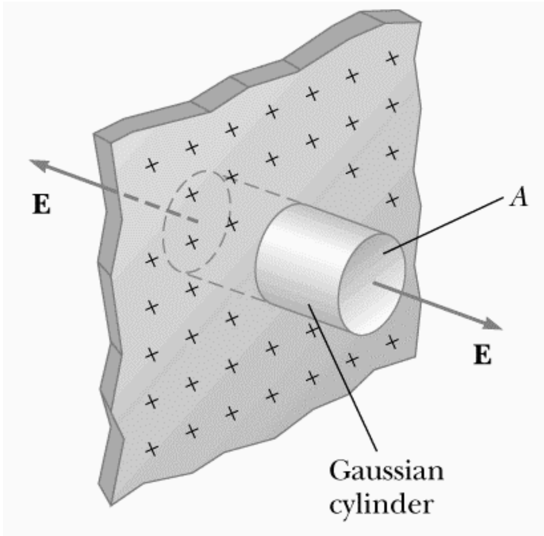
$$E = \frac{l}{2pe_0 r}$$



例題 **平面對稱**(planar symmetry)**分布**

$$2(E \cdot A) = \frac{sA}{e_0}$$

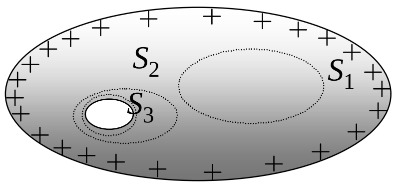
$$E = \frac{s}{2e_0}$$



帶電導體之電場分布

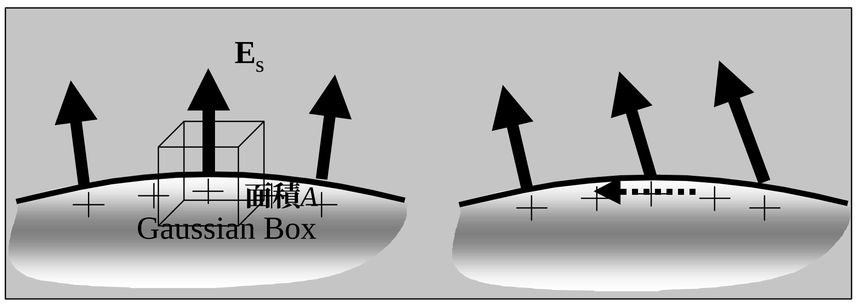
•這裡我們討論的是在*靜電平衡狀態*，即無電荷在導體中運動。由此可進一步推知<u>在靜電平衡的導體內部必無電場</u>，否則導體內可移動電荷會受電場影響而運動。

•若此導體帶有淨電荷，則這些多出之電荷必然分佈在導體表面。在導體內部之任一封閉高斯面上之電通量也必為零，因為其所包住的電荷為零。即使導體內包含有空洞，或有外界靜電場此結論依然成立。



•導體內空洞表面無電荷分布。

•靜電平衡導體表面外之電場必然和表面垂直，否則會造成表面電荷沿表面運動。



電磁學

•導體表面電場的強度和表面電荷密度s 成正比。

$$e_0 EA = sA$$

$$E = \frac{s}{e_0}$$

有關高斯定律的推導

定義立體角(solid angle) $\Delta\Omega = \frac{\Delta A}{r^2}$ [steradian]

整個球所包含之立體 $\Omega = \frac{4pr^2}{r^2} = 4p$

$$\Delta\Phi_E = \mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{A} = E\Delta A\cos q = \frac{q}{4pe_0}\frac{\Delta A\cos q}{r^2}$$

$$\Phi_E = \frac{q}{4pe_0}\oint\frac{dA\cos q}{r^2} = \frac{q}{4pe_0}\oint d\Omega = \frac{q}{e_0}$$