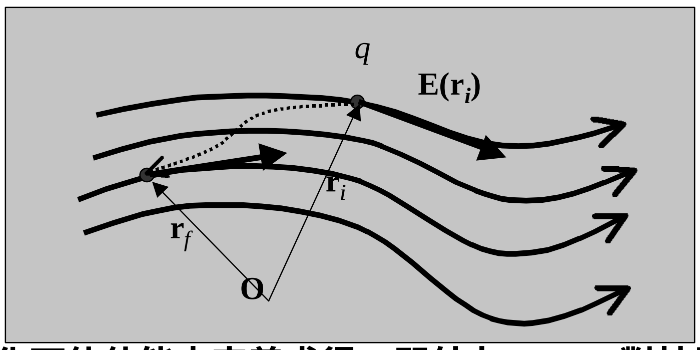
電磁學

電位能與電位(Electric Potential Energy and Electric Potential)

電位能與電位的定義

E(r)是位置的函數，F(r)=qE(r)亦是位置函數，且$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=0$（對於任一迴路），故靜電力為保守力，可定義位能，稱為電位能(Electric Potential Energy)。



由$\mathbf{r}_i$至$\mathbf{r}_f$的電位能變化可依位能之定義求得，即外力($\mathbf{F}_{\text{applied}}$)對抗電力將帶電量$q$之物體緩慢地由$\mathbf{r}_i$移至$\mathbf{r}_f$所做的功。

$$U(\mathbf{r}_f)-U(\mathbf{r}_i)=\Delta U=W_{\mathbf{r}_i\to\mathbf{r}_f}=\int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f}\mathbf{F}_{\text{applied}}\cdot d\mathbf{r}$$
$$=\int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f}-\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}=\int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f}-q\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$$

即 $$\Delta U=\int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f}-q\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$$

電磁學

定義：電位(Electric Potential) $V(\mathbf{r})$

單位正電荷在電場中所具備的電位能。

$$V(\mathbf{r})\equiv\frac{U(\mathbf{r})}{q}$$ **單位**[J/C]=[volt]=[V]

兩點的電位差

$$\Delta V=V(\mathbf{r}_f)-V(\mathbf{r}_i)=\frac{U(\mathbf{r}_f)}{q}-\frac{U(\mathbf{r}_i)}{q}=\frac{\Delta U}{q}$$
$$=\int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f}-\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}=\int_{V(\mathbf{r}_i)}^{V(\mathbf{r}_f)}dV$$

故 $$\boxed{dV=-\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}}$$

我們可以選擇一個電位能的零點，即電位的零點。

零點的選擇：

(1) 選擇無限遠處為零點，即 $U(\infty)=0$ or $V(\infty)=0$

$$U(\mathbf{r})=\int_{\infty}^{\mathbf{r}}-q\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$$

$$V(\mathbf{r})=\int_{\infty}^{\mathbf{r}}-\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$$

(2) 在實際應用上，我們會選擇一個廣大導體(通常是地球表面)為零點，稱為接地點(Ground)，V_{ground}=0。

有關在電場中之能量守恆

若無外力影響，電荷在電場中運動之力學能守恆。 $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_f$

$$K(\mathbf{r}_i)+U(\mathbf{r}_i)=K(\mathbf{r}_f)+U(\mathbf{r}_f)$$

若有電場作用以外的外力，則外力做功等於電荷的力學能變化。

$$\int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f}\mathbf{F}_{applied}\cdot d\mathbf{r}=\Delta(K+U)=\Delta(K+qV)=\Delta K+q\Delta V$$

電磁學

***電子伏特**(electron-volt)*—能量的單位

一基本電荷*e*經1 volt電位差所產生之位能差大小稱為1 eV。

1 eV= (1.6 × 10^{-19} C)(1 J/C) = 1.6×10^{-19} J

電荷分布所產生之電位

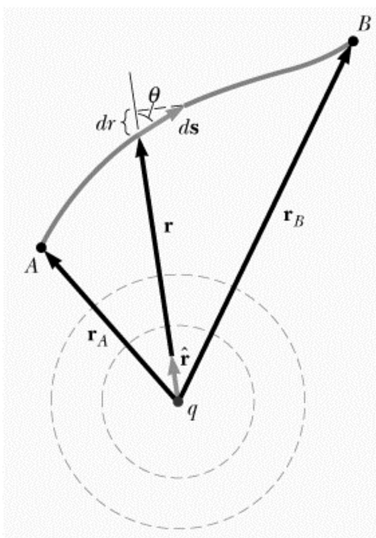
(1)點電荷所造成的電位

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4pe_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

$$V_B-V_A=\int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B}-\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$$

$$V_B-V_A=\int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B}-\frac{1}{4pe_0}\frac{q}{r'^2}\hat{\mathbf{r}}\cdot d\mathbf{r}'=\int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B}-\frac{1}{4pe_0}\frac{q}{r'^2}\hat{\mathbf{r}}\cdot dr'\hat{\mathbf{r}}$$

$$=\int_{r_A}^{r_B}-\frac{1}{4pe_0}\frac{q}{r'^2}dr'=\frac{1}{4pe_0}\frac{q}{r'}\bigg|_{r_A}^{r_B}=\frac{q}{4pe_0}\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right)$$

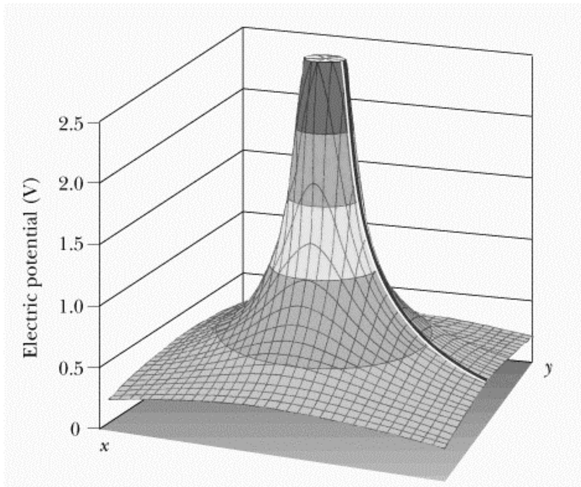


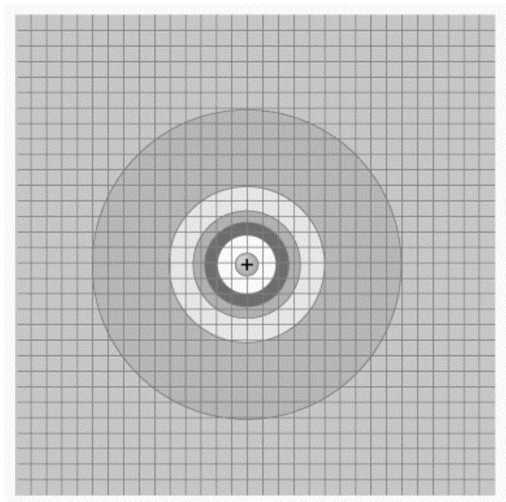
電磁學

$$V(\mathbf{r})-V(\mathbf{r}_0)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)$$

選擇 $r_0\to\infty$**,** $V\to 0$

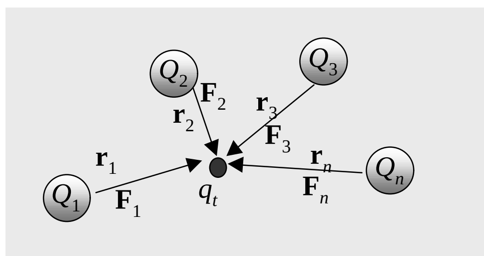
$$V(\mathbf{r})=V(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$





電磁學

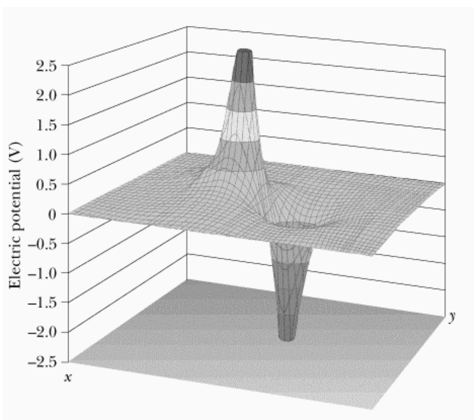
(2) **電荷分布所造成之電位**

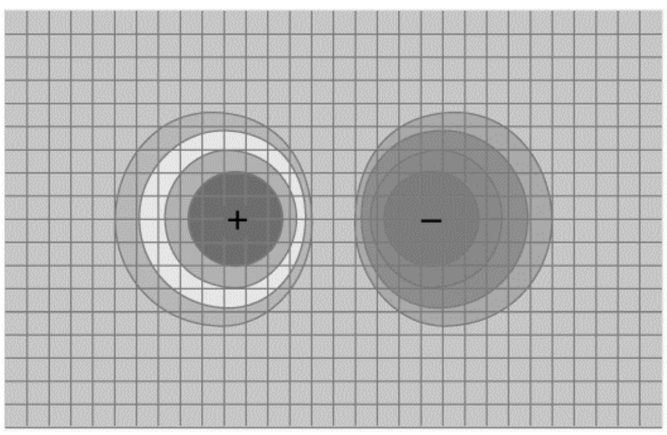


$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{r_i^2}\hat{\mathbf{r}}_i$$ **向量加法**

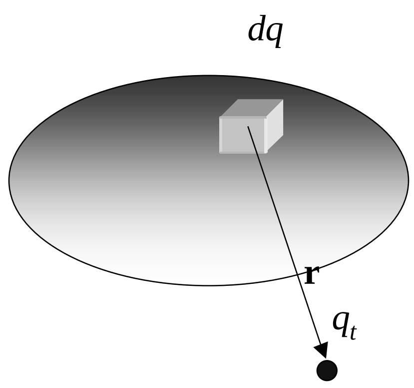
$$U_{q_t}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_tQ_i}{r_i}$$ **純量加法**

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{r_i}=\sum_{i=1}^{n}V_i$$ **純量加法**





若為連續分布 $Q_i \to dq,\ \Sigma \to \int$



$$dV = \frac{1}{4pe_0}\frac{dq}{r}$$

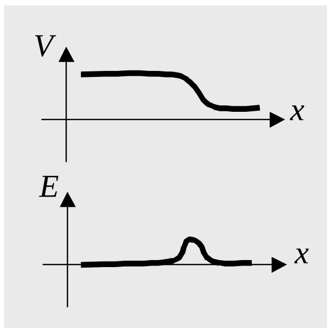
$$V = \int dV = \int \frac{1}{4pe_0}\frac{dq}{r}$$

$$dq = \begin{cases} l\,ds & \text{for line distribution} \\ s\,dA & \text{for area distribution} \\ r\,dV & \text{for volume distribution} \end{cases}$$

電位與電場

(1) **由電位對位置之微分求電場**

$$dV = -\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$$



一維的情形： $dV = -E dx$

$$E = -\frac{dV}{dx}$$

二維的情形

$$dV = -E_x dx - E_y dy = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)dy$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}\right)V$$

三維的情形

$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x},\quad E_y=-\frac{\partial V}{\partial y},\quad E_z=-\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\mathbf{E}=-\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i}-\frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j}-\frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}=-\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)V$$

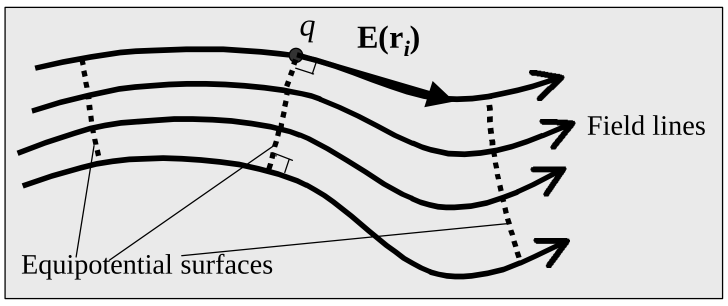
$$\equiv-\nabla V\equiv-\frac{d}{d\mathbf{r}}V$$

其中

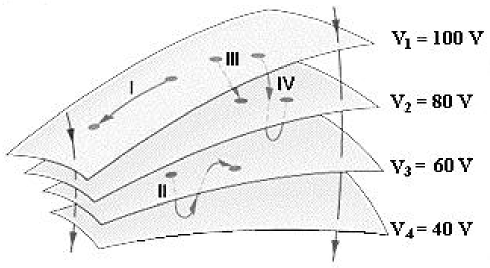
$$\nabla\equiv\frac{d}{d\mathbf{r}}\equiv\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

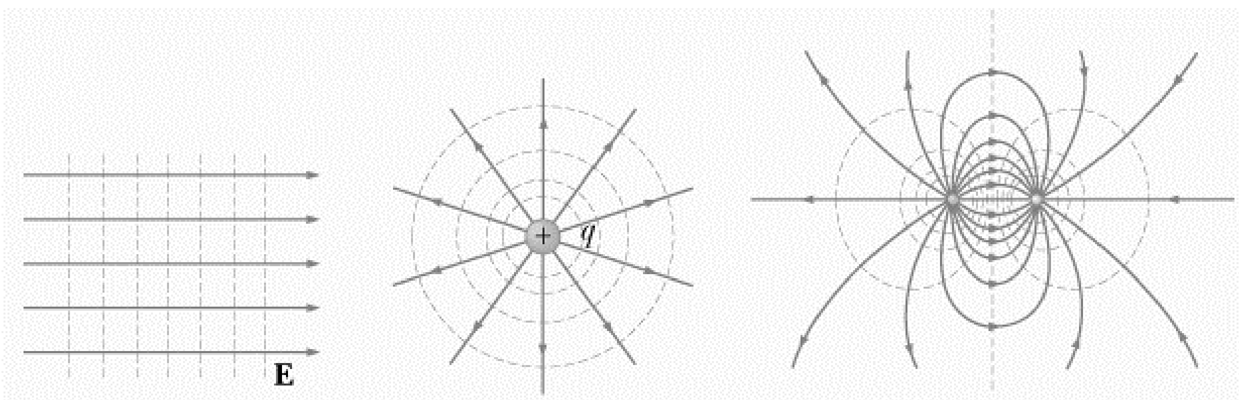
(2) **電力線與等位面**(Equipotential Surface)

$$dV=-\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$$



在等位面上位移$d\mathbf{r}$，$dV=0$，**故**$\mathbf{E}\perp d\mathbf{r}$，**即電力線必和等位面垂直。**





(3) **梯度與等位面**

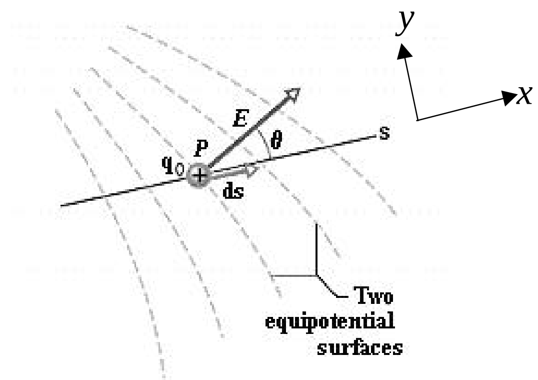
基本上電場即電位對位置的變化量(加一個負號)，電場方向則和等位面垂直，更清楚的說是連結兩鄰近等位面最短距離之路徑方向，而且是由高電位朝向低電位方向。

$$dV = -\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$$

$$qdV = -q\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$$

$$dU = -\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

即力學之基本特性

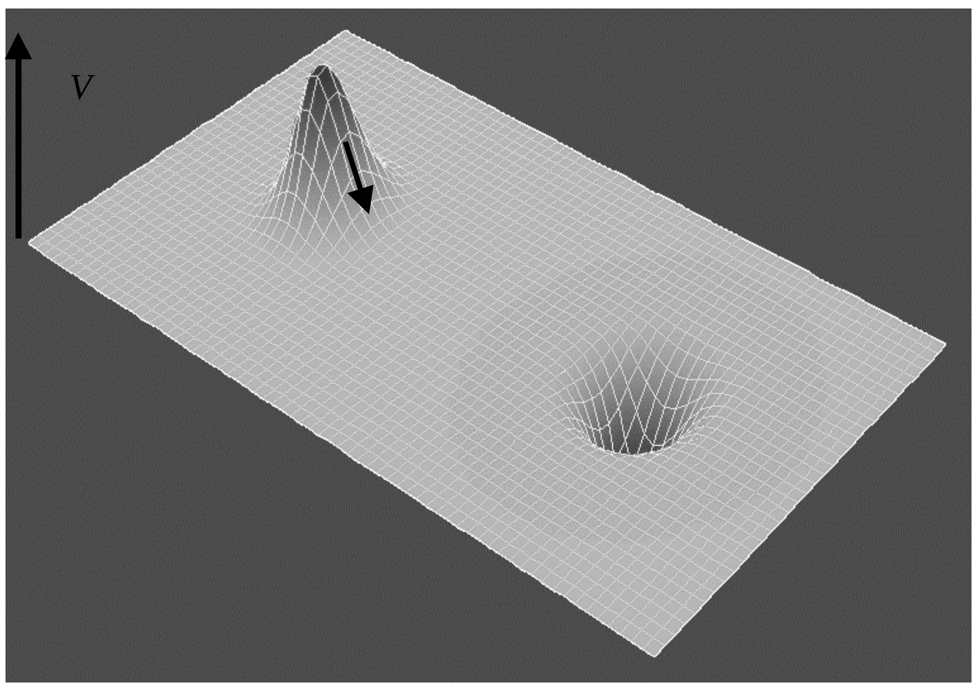


如圖考慮沿一路徑s之軌跡

$$dV = -\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -E(\cos q)ds$$

$$E\cos q = E_s = -\frac{\partial V}{\partial s}$$

即沿s方向之電位對位置的變化(加一負號)就是該方向電場的分量。
若將*s*定為*x*方向，垂直方向定為*y*方向，則可得原二維情形之公式。



電磁學

例題 **電偶極造成的電位**

$$V=\sum_{i=1}^{2}V_i=V_{(+)}+V_{(-)}$$

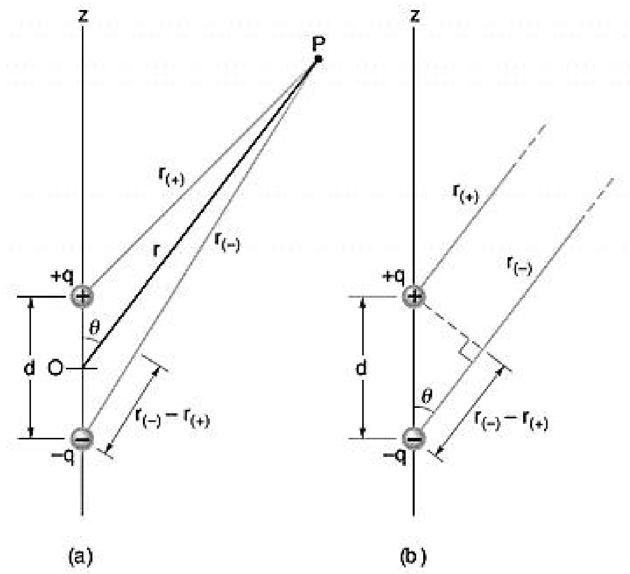
$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r_{(+)}}+\frac{-q}{r_{(-)}}\right)$$

$$=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r_{(-)}-r_{(+)}}{r_{(-)}r_{(+)}}$$

$$r>>d$$

$$r_{(-)}-r_{(+)}\approx d\cos\theta \quad \text{and} \quad r_{(-)}r_{(+)}\approx r^2$$

$$V=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{d\cos\theta}{r^2}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$



電磁學

若用直角座標表示

$$V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}=\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{z/\sqrt{x^2+z^2}}{x^2+z^2}=\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}$$

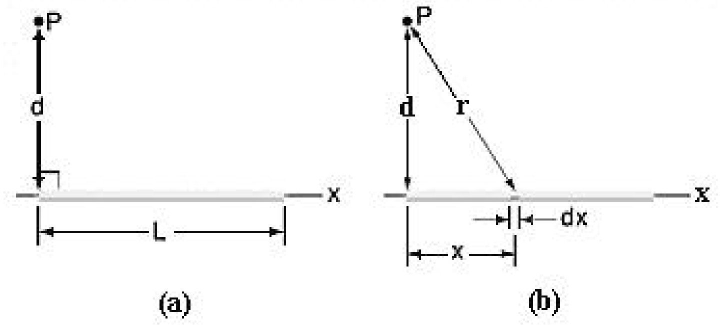
$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{3}{\cancel{2}}\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{\cancel{2}x\cdot z}{\left(x^2+z^2\right)^{5/2}}=-\frac{3p}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\frac{x}{r}\frac{z}{r}$$

$$=-\frac{3p}{4\pi\epsilon_0}\frac{\cos\theta\sin\theta}{r^3}$$

$$E_z=-\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}-\frac{3}{\cancel{2}}\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{\cancel{2}z\cdot z}{\left(x^2+z^2\right)^{5/2}}$$

$$=\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}-\frac{3p}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\frac{z^2}{r^2}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{r^3}\left(1-3\cos^2\theta\right)$$

例題 帶電線段造成的電位



$$dq = \lambda\, dx$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dx}{\left(x^2+d^2\right)^{1/2}}$$

$$V = \int dV = \int_0^L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dx}{\left(x^2+d^2\right)^{1/2}}$$

利用積分公式：

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{1/2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

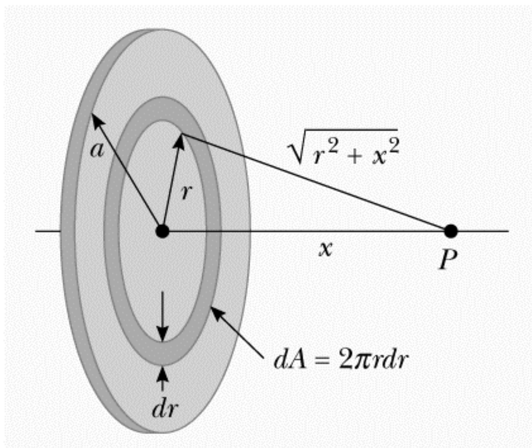
$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{dx}{\left(x^2+d^2\right)^{1/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(x+\sqrt{x^2+d^2}\right)\Big|_0^L$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(L+\sqrt{L^2+d^2}\right)-\ln d\right] = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{L+\sqrt{L^2+d^2}}{d}\right]$$

例題 帶電盤造成的電位

$$dq = \sigma\, dA = \sigma\,(2\pi r)dr$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\,(2\pi r)dr}{\left(x^2+r^2\right)^{1/2}}$$



電磁學

$$V=\int dV=\int_0^a \frac{1}{4pe_0}\frac{s\,(2pr)dr}{\left(x^2+r^2\right)^{1/2}}=\frac{s}{2e_0}\int_0^a \frac{rdr}{\left(x^2+r^2\right)^{1/2}}$$

$$X^2=x^2+r^2,\qquad XdX=rdr$$

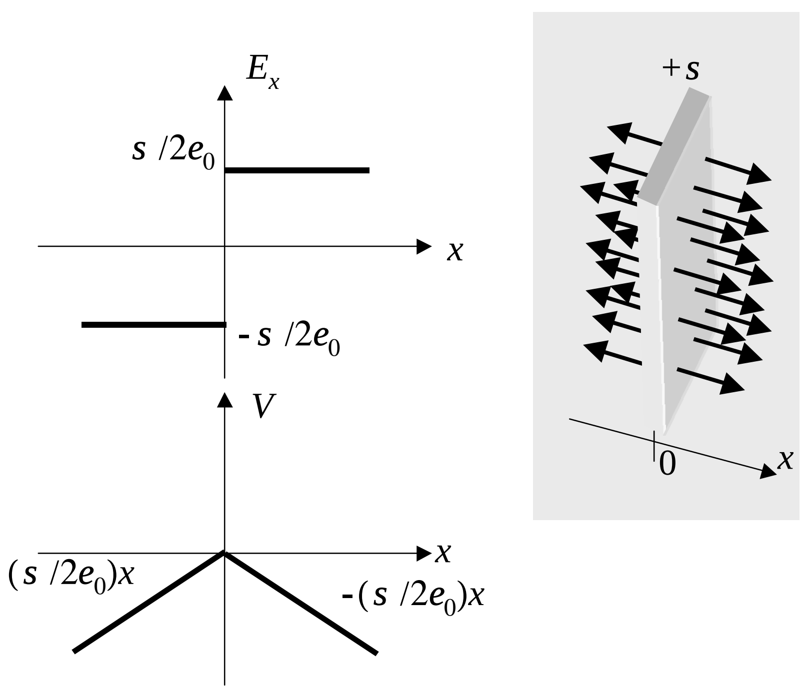
$$V(x,0,0)=\frac{s}{2e_0}\int_{|x|}^{\sqrt{x^2+a^2}}\frac{XdX}{X}=\frac{s}{2e_0}\left(\sqrt{x^2+a^2}-|x|\right)$$

$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{s}{2e_0}\left(\pm 1-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)\qquad \begin{matrix}+\\-\end{matrix}\longrightarrow z\begin{matrix}>0\\<0\end{matrix}$$

電磁學

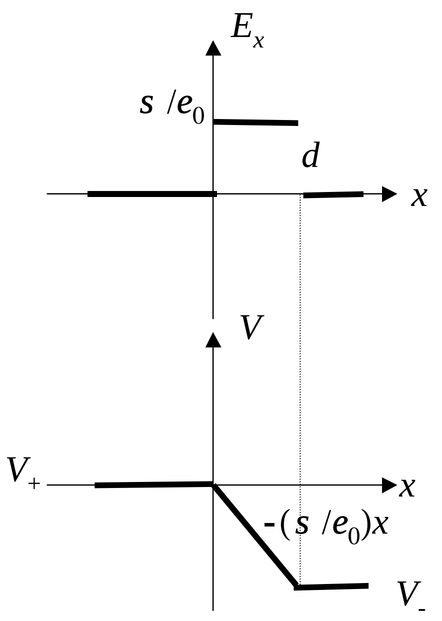
例題 **面電荷分布造成的電位**

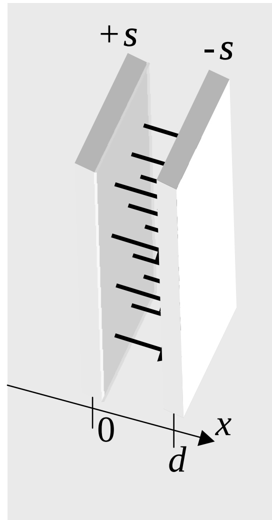
(a)



選擇$V(0)=0$

(b)





$$V_+ - V_- = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

電磁學

導體的電位分布

在靜電平衡之導體內部無電場，任兩點間無電位差，也就是說整個導體內部電位均相同，即整個導體為一等位體。在導體內部之空腔內亦不會有電場，空腔內任兩點間亦無電位差。

例題 **帶電金屬球之電位分布**

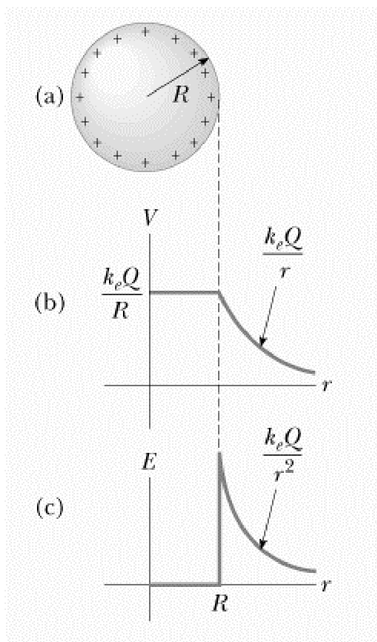
電場 **當**$r<R$，$E=0$

當$r>R$，$E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$

電位

當$r<R$，$V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R}$

當$r>R$，$V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r}$



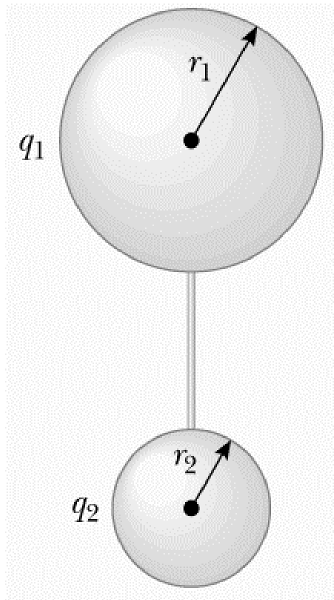
例題 **導線連結的不同半徑帶電金屬球**

以導線連結之導體在靜電平衡時各部分電位均相同，且導體內部無電場與淨電荷。

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2}$$
$$\Rightarrow q_1 : q_2 = r_1 : r_2$$

導體表面之電場和面電荷密度σ **成正比。**

$$\sigma_1 : \sigma_2 = E_1 : E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1^2} : \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2^2} = \frac{1}{r_1} : \frac{1}{r_2}$$

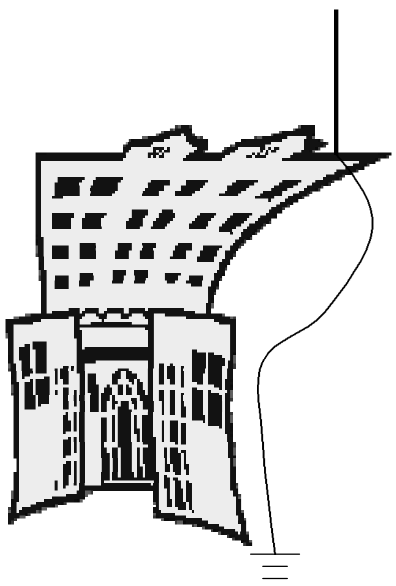


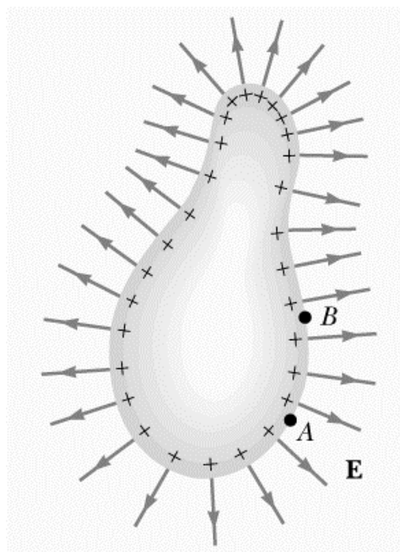
$$E \propto \frac{1}{R}$$

曲率半徑愈小，電場愈大。

***尖端放電*：帶電導體的尖端電場很大，易導致空氣分子游離。**

避雷針之原理

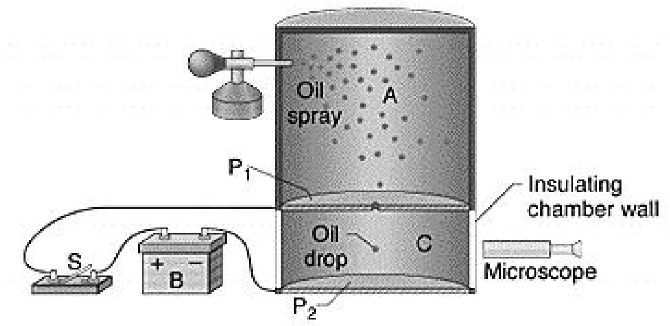




電磁學

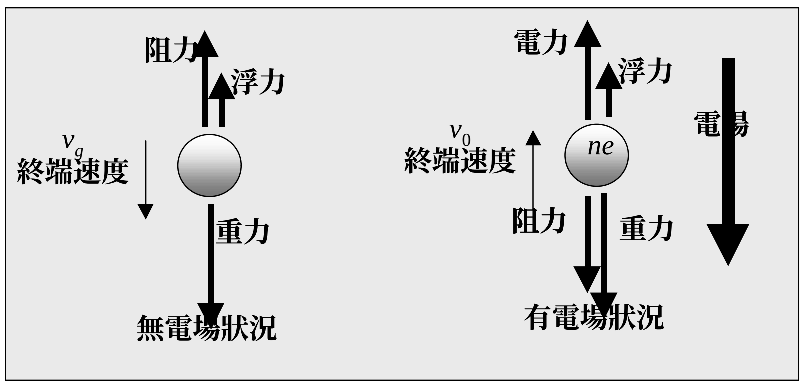
重要實驗

密立根油滴實驗
(Millikan oil-drop experiment)



目的：測量基本電荷的大小。
獲1923諾貝爾物理獎。

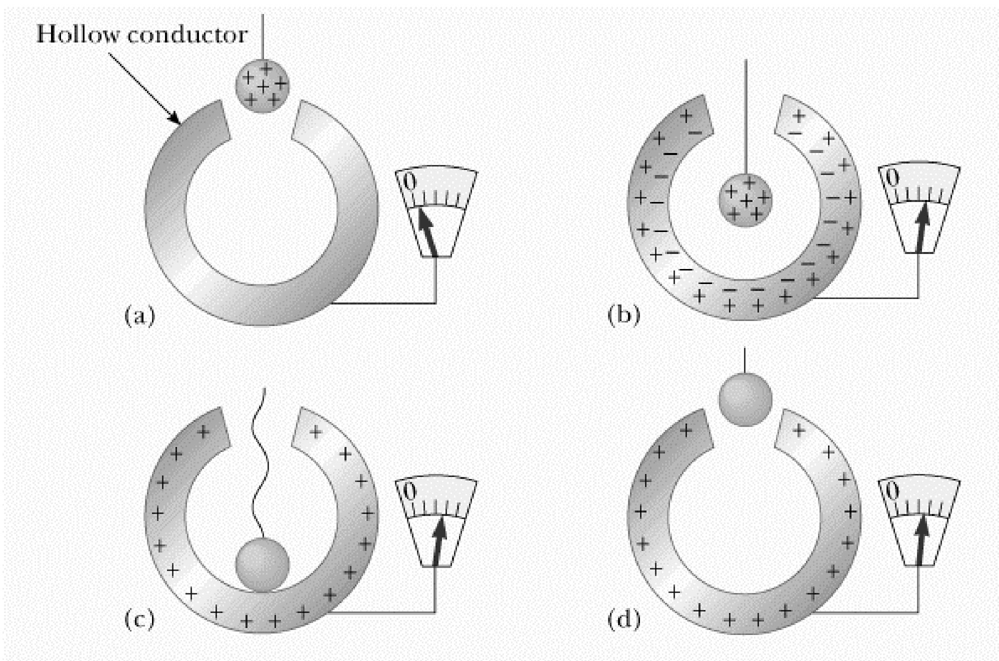
方法：利用帶電之油滴在電場中運動時，電力、重力、浮力及空氣阻力間之平衡估算出電力大小，再推出帶電量。



電磁學

法拉第冰桶實驗 (Faraday's ice-pail experiment)

用來證明高斯定律

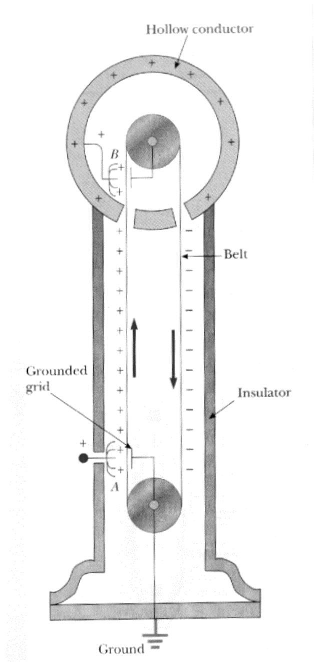


電磁學

應用

The Van de Graaff Generator

用來產生很高的電壓



空氣的游離電場（或稱崩潰電場breakdown voltage**）**

3×10^{6} V/m

考慮一個半徑1m**的導電球，表面電場到達崩潰電場時，電壓為**3×10^{6} V**！！**

此時球上的總電荷為

$$q = 4\pi\epsilon_0 rV = 3.34\times10^{-4}\ \text{C}$$

一般只到100kV**。**

電磁學

Xerography and Laser Printers