簡易電路

基本電路組成

由元件(components, devices)**、電線**(wires)**以及電源**(sources)**所構成的網路稱為*電路***(electric circuit)。

直流電路(<u>D</u>irect-<u>C</u>urrent Circuit, DC Circuit)

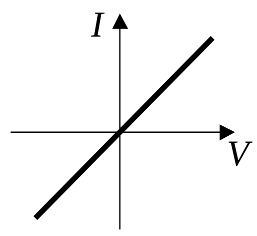
電路上的電流和電位不隨時間改變。

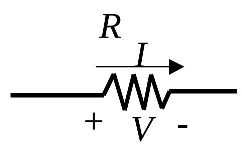
交流電路(<u>A</u>lternate-<u>C</u>urrent Circuit, AC Circuit)

電路上的電流和電位隨時間改變。

元件：目前我們學過的元件

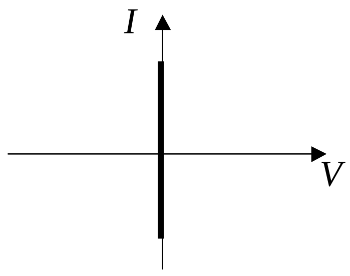
電阻(resistor)

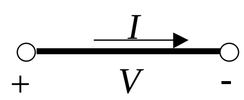




電磁學

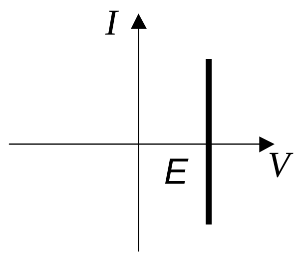
導線

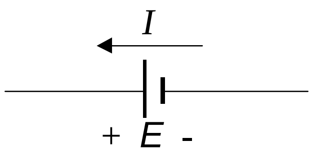




理想的導線上，即使有電流，各處之電位均相同。實際的導線則有電阻，會造成電位降(voltage drop)。

直流電壓源(DC voltage source)





電磁學

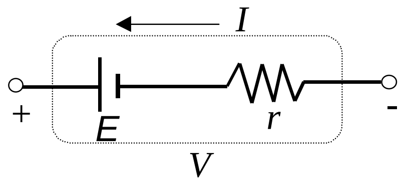
電池(battery)

利用化學反應維持正負兩端之電位差，此電位差又稱為電動勢(electromotive force, emf)。電動勢又可定義為將單位電荷由負極移到正極所做的功，即

$$E=\frac{dW}{dq}$$

能夠產生emf**之元件稱為**emf device**，例如電池、發電機、直流電源供應器等。**

實際的電池除了一理想的電動勢元件外，尚有一內阻(internal resistance)**，如下圖**



內阻r**會造成一和**E**相反之電位降**Ir**，使得**V**比**E**小，**

$$V=E-Ir$$

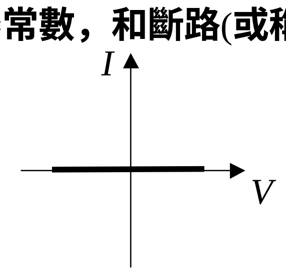
電磁學

電容器(capacitor)

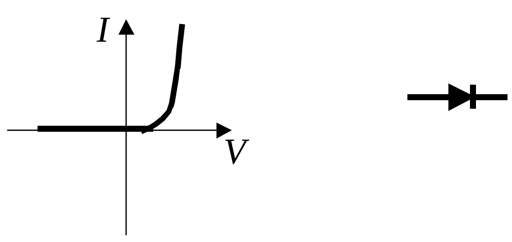
$$q=CV$$

$$\frac{dq}{dt}=I=C\frac{dV}{dt}$$

I**和**V**的關係並非簡單的比例，而是微分的關係。當只考慮直流電路時，電流電壓不隨時間改變，即，故**I=0**且**V=**常數，和斷路(或稱開路，**open circuit)**相同。**



並非所有的電路元件的I-V**特性圖均為一直線，例如二極體的特性曲線：**



電阻之串聯與並聯

(1)**電阻之串聯**(Resistance in Series)

通過串聯元件的電流均相同。

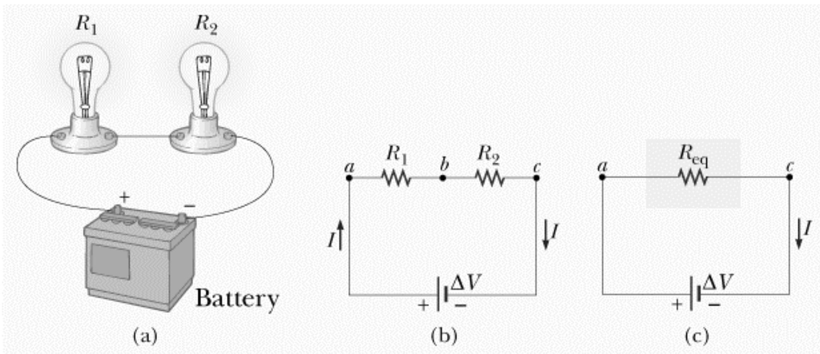
a、c**兩點的電位降等於各電阻電位降之和，也等於電池所提供之電動勢**ΔV。

$$\Delta V = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2) = iR_{\text{eq}}$$

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2$$

若有N**個電阻串聯，其等效電阻可寫為：**

$$R_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^{N} R_i$$



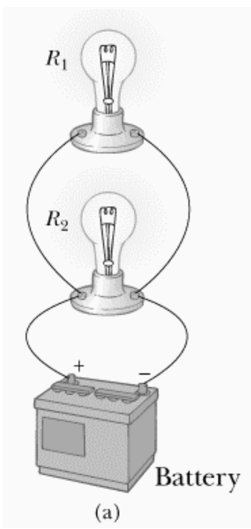
(2)**電阻之並聯**(Resistance in Parallel)

並聯元件兩端電位差均相同，總電其為各元件電流之和。

$$\Delta V = I_1R_1 = I_2R_2 = IR_{\text{eq}}$$

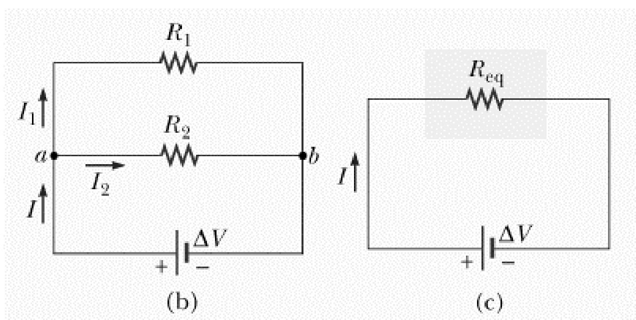
$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{I}{\Delta V} = \frac{i_1 + i_2}{\Delta V} = \frac{I_1}{\Delta V} + \frac{I_2}{\Delta V} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$R_{\text{eq}} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$$



若有N**個電阻並聯，其等效電阻可寫為：**

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}$$



一些簡單的結果：

(a) 電阻愈串聯愈大，愈並聯愈小。

10kΩ+10kΩ=20kΩ,　　　10kΩ//10kΩ=5kΩ

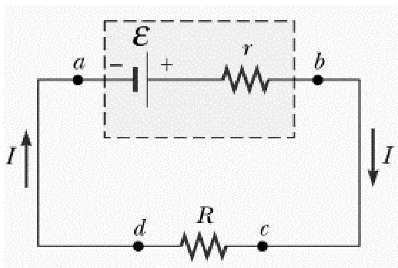
(b) 大電阻串小電阻為大電阻，大電阻並小電阻為小電阻。

1MΩ+10Ω~1MΩ,　　　1MΩ//10Ω~10Ω

SERIES	PARALLEL
Resistors	
$R_{eq} = \sum_{j=1}^{n} R_j$ Same current through all resistors	$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_j}$ Same potential difference across all resistors
Capacitors	
$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{C_j}$ Same charge on all capacitors	$C_{eq} = \sum_{j=1}^{n} C_j$ Same potential difference across all capacitors

例題　Matching the Load

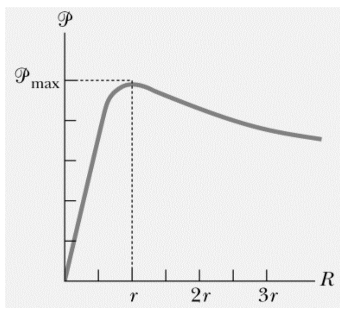
Show that the maximum power delivered to the load resistance *R* in the figure below occurs when the load resistance matches the internal resistance---that is, when *R*=*r*.



$$P = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2}$$

解 $\frac{\partial}{\partial R} P = 0$

即可得 $R=r$



希荷夫電路理論 (Kirchhoff's Rules)

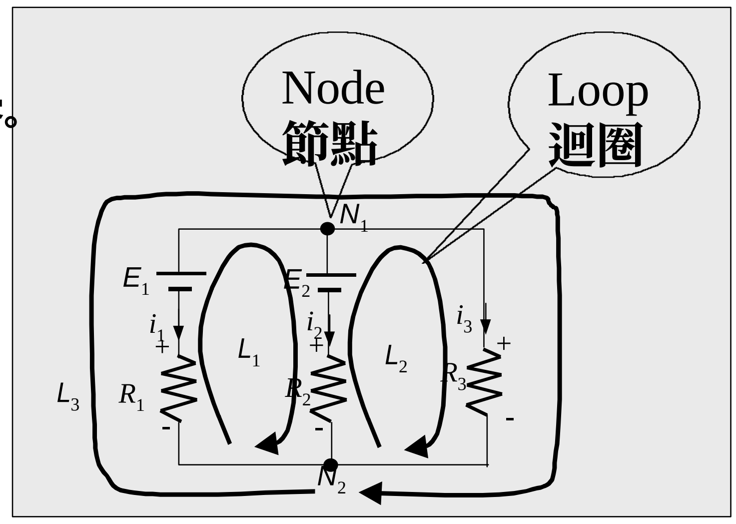
克希荷夫電流定律(KCL)　Node Rule　Junction Rule
進入任一節點之電流和必等於流出該節點之電流和。

N_1　$i_1+i_2+i_3=0$
N_2　$i_1+i_2+i_3=0$　**和**N_1**所得相同**

克希荷夫電壓定律(KVL)
Loop Rule
沿任一封閉迴路之電位變化總和為零。

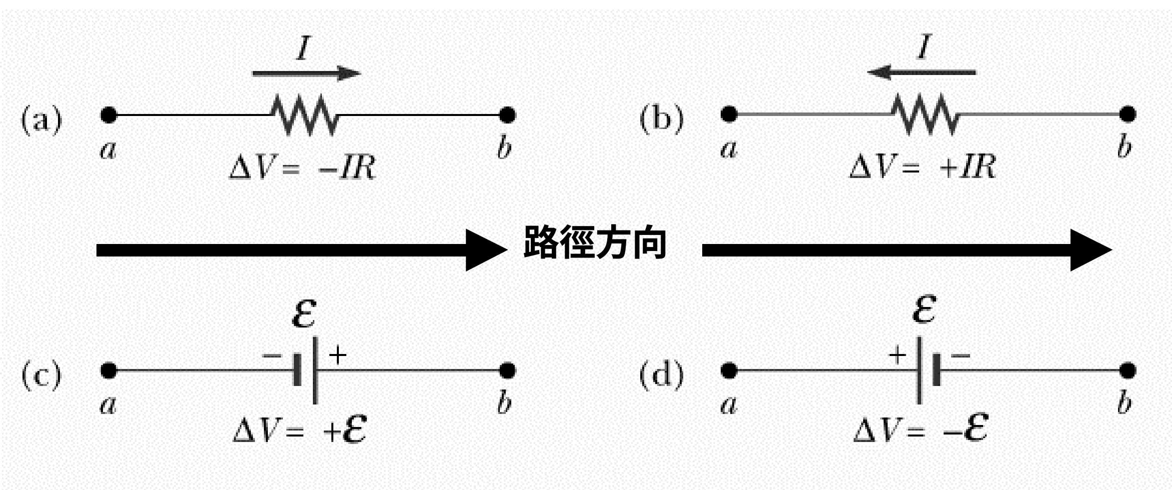
L_1　$i_1R_1+E_1-E_2-i_2R_2=0$
L_2　$i_2R_2+E_2-i_3R_3=0$
L_3　$i_1R_1+E_1-i_3R_3=0\ (=L_1+L_2)$

由Junction rule**及**Loop rule**可得**3**個獨立方程式，未知數共有**3**個，解聯立方程式即可。**



使用KVL**時，沿路徑方向判定電壓變化的方法：**

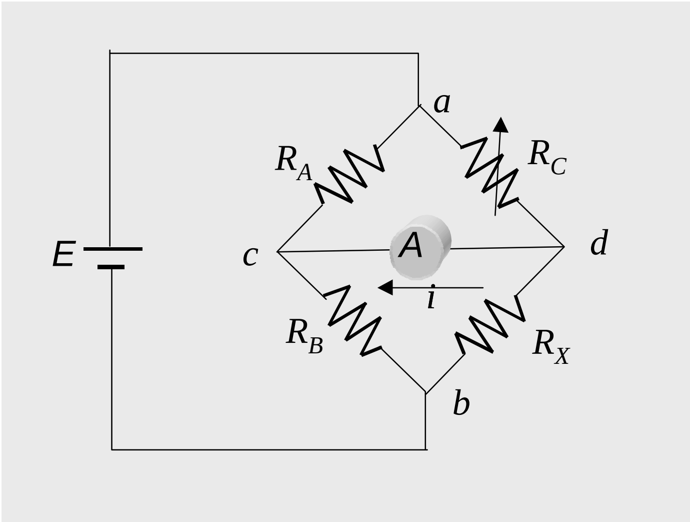
圖為計算a**到**b**之電位變化。**　$\Delta V=V_b-V_a=V_{ba}$



例題 Wheatstone Bridge
（惠斯通電橋）

調整R_C使通過電流計A之電流i為零，此時

$$V_c = V_d$$
$$V_{cb} = V_{db}$$
$$\frac{R_B}{R_A + R_B} = \frac{R_X}{R_X + R_C}$$
$$\frac{R_B}{R_A} = \frac{R_X}{R_C}$$

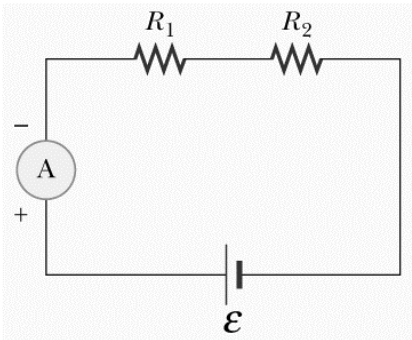


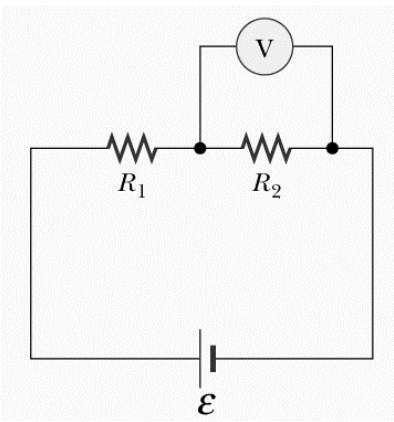
有關電流計(Ammeter)**與電壓計**(Voltmeter)**：**

電流計與電路串聯，理想的電流計兩端無電位差。

電壓計與電路並聯，理想的電壓計無電流流過。

注意： 一般三用電表測電壓和測電流之輸入端子並不同。

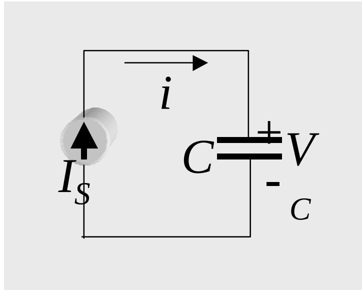




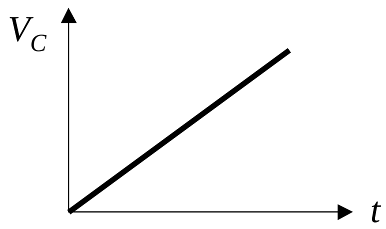
電容之充放電(Charging and Discharging a Capacitor)

經由定電流源充電

令 $V_C(t)=0$ initial condition(起始條件)



$$i=\frac{dq}{dt}=\frac{dCV_C}{dt}=C\frac{dV_C}{dt}$$
$$dV_C=\frac{i}{C}dt=\frac{I_S}{C}dt$$
$$V_C=\int\frac{I_S}{C}dt=\frac{I_S}{C}t$$

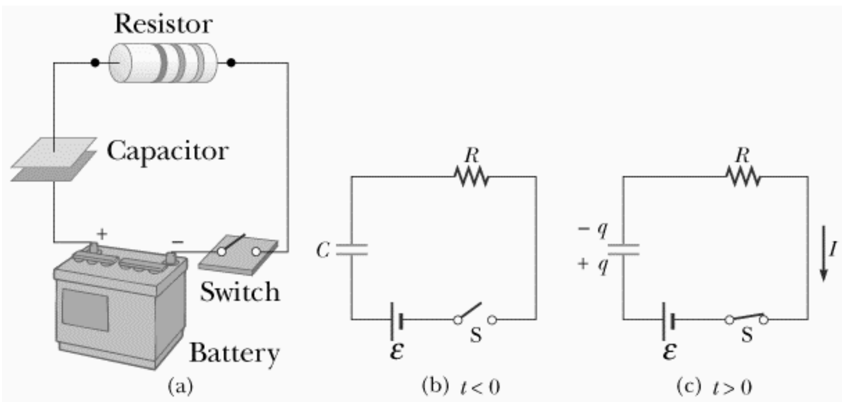


電磁學

經由電壓源及電阻充電

令 $V_C(t)=0$ initial condition(起始條件) $t=0$ S接上

$$I(0)=\frac{E-V_C(0)}{R}=\frac{E}{R}$$



定性的描述V_C及I對時間的變化:
開始充電後(t>0)，V_C增加，V_R下降(因為$V_C+V_R=E$)，故I下降。I下降造成充電速度變慢，因。經過很長時間，I趨近於零，V_C趨近於E。

電磁學

解微分方程： $I=\frac{dq}{dt}=C\frac{dV_C}{dt}$

$E=V_R+V_C=IR+\frac{q}{C}$

左右微分得 $0=R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}\frac{dq}{dt}=R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I$

起始條件 $I(0)=\frac{E-V_C(0)}{R}=\frac{E}{R}$

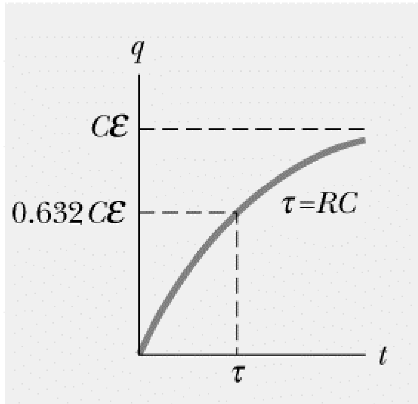
$$\frac{dI}{I}=-\frac{1}{RC}dt' \qquad \int\frac{dI}{I}=-\int\frac{1}{RC}dt'$$

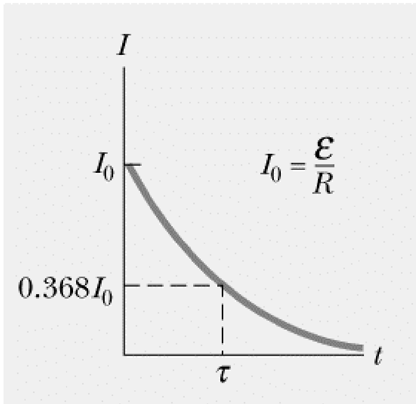
$$\ln I\Big|_{I(0)}^{I(t)}=-\frac{1}{RC}t=\ln\frac{I(t)}{I(0)}$$

$$I(t)=I(0)e^{-\frac{1}{RC}t}=I(0)e^{-t/t}=\frac{E}{R}e^{-t/t} \qquad t\equiv RC$$

$$V_C(t)=E-V_R=E-IR=E-Ee^{-t/t}=E\left(1-e^{-t/t}\right)$$

$$q(t)=CV_C(t)=CE\left(1-e^{-t/t}\right)$$





電磁學

$t=RC$ **稱為時間常數**(time constant)

單位： $[RC]=\Omega\mathrm{F}=\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}\cdot\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}}=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{C/s}}=\mathrm{s}$

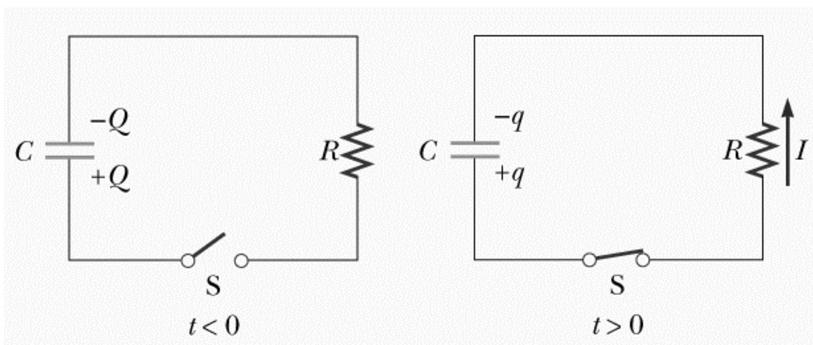
經過一個時間常數的時間，充電電流降為原來的e^{-1}~0.37=37%**，電容上之電壓升至**E**之**$(1-e^{-1})$~0.63=63%**。**

RC**愈大，充電時間愈長。**

經由電阻放電

令
$V_C(t)=E$ initial condition(**起始條件**)
$t=0$ S**接上** $I(0)=\frac{V_C(0)}{R}=\frac{E}{R}$

(注意電流方向)



電磁學

定性的描述V_C及I對時間的變化:
開始放電後(t>0)，V_C減小，V_R下降(因為V_C=V_R)，故I下降。I下降造成放電速度變慢，。經過很長時間，I趨近於零，V_C趨近於0。

解微分方程：

$$-i=\frac{dq}{dt}=C\frac{dV_C}{dt} \qquad V_R=V_C \Rightarrow iR=\frac{q}{C}$$

左右微分得

$$R\frac{dI}{dt}=\frac{1}{C}\frac{dq}{dt} \qquad R\frac{dI}{dt}=-\frac{1}{C}I$$

$$\frac{dI}{I}=-\frac{1}{RC}dt' \qquad \int\frac{dI}{I}=-\int\frac{1}{RC}dt'$$

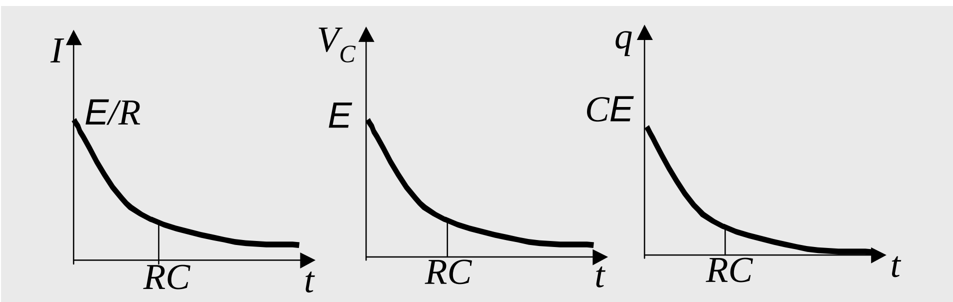
$$\ln I\Big|_{I(0)}^{I(t)}=-\frac{1}{RC}t=\ln\frac{I(t)}{I(0)}$$

$$I(t)=I(0)e^{-\frac{1}{RC}t}=I(0)e^{-t/t}=\frac{E}{R}e^{-t/t} \qquad t\equiv RC$$

$$V_C(t)=V_R=IR=Ee^{-t/t}$$

$$q(t)=CV_C(t)=CEe^{-t/t}$$

電磁學



經過一個時間常數的時間，放電電流降為原來的e^{-1}~0.37=37%**，電容上之電壓下降至**E**之**e^{-1}~0.37=37%**。**

RC**愈大，放電時間愈長。**

例題

A 5.00 μF capacitor is charged to a potential difference of 800 V and then discharged through a 25.0 kΩ resistor. How much energy is delivered to the resistor in the time it takes to fully discharge the capacitor?

$$\text{Energy} = \int_0^\infty I^2 R dt = \int_0^\infty \left(I_0 e^{-t/RC}\right)^2 R dt$$

$$= \frac{\mathcal{E}^2}{R}\int_0^\infty e^{-2t/RC} dt = \frac{1}{2} C\mathcal{E}^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(5.00\ m\text{F}\right)\left(800\ \text{V}\right)^2 = 1.60\ \text{J}$$

$$I(0) = I_0 = \frac{V_C(0)}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R}$$