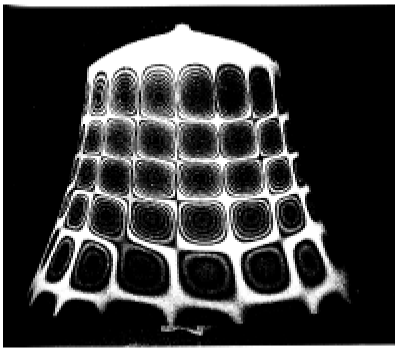
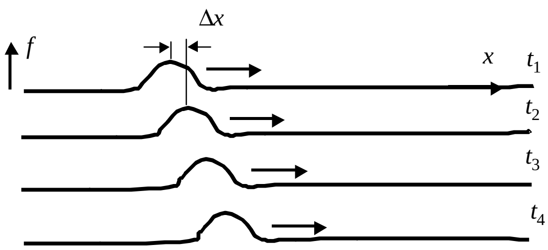
第三部份 機械波 (Mechanical Waves)

1. 波動的描述
2. 繩波
3. 重疊原理
4. 駐波
5. 固體中的橫波與縱波
6. 聲波與基本聲學
7. 都卜勒效應



波動的描述

一維傳遞的波動 (One-Dimensional Traveling Waves)



波傳遞的速度

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{t_2-t_1}$$

f 可以是壓力、位置、密度、電磁場強度…
可以是純量、向量…

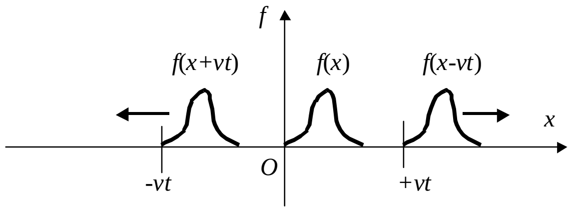
機械波

基本一維傳遞的波動函數（one-dimensional traveling wave function）

$$f(x,t)=f(x\mp vt)$$

$\mp$ 表示 $\begin{cases}\text{正}\\ \text{負}\end{cases}$ 向傳遞之波形

$f(x)$為一函數，$f(x\mp vt)$ 為原點平移 $\mp vt$ 之同形函數。



機械波

波動方程式 (Wave Equation)

$f(x,t)=f(x\mp vt)$ 為偏微分方程式 $\boxed{\dfrac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}=v^2\dfrac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}}$ 之解

此偏微分方程式稱為一維之***波動方程式***(*Wave Equation*)

＊＊ $\dfrac{\partial}{\partial x}$ 固定t，只對x微分

＊＊ $\dfrac{\partial}{\partial t}$ 固定x，只對t微分

機械波

證明

利用chain rule

$$\frac{\partial f(x\mp vt)}{\partial t}=f'(x\mp vt)\frac{\partial(x\mp vt)}{\partial t}=f'(x\mp vt)\cdot(\mp v)$$

$$\frac{\partial^2 f(x\mp vt)}{\partial t^2}=f''(x\mp vt)\cdot(\mp v)^2=f''(x\mp vt)\cdot v^2$$

$$\frac{\partial f(x\mp vt)}{\partial x}=f'(x\mp vt)\frac{\partial(x\mp vt)}{\partial x}=f'(x\mp vt)$$

$$\frac{\partial^2 f(x\mp vt)}{\partial x^2}=f''(x\mp vt)$$

Thus

$$\frac{\partial^2 f(x\mp vt)}{\partial t^2}=v^2\cdot\frac{\partial^2 f(x\mp vt)}{\partial x^2}$$

機械波

反過來說也是對的（證明省略）

$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}$ **之解必可寫為** $f(x\mp vt)$ **或**

$f(x+vt)+g(x-vt)$

例題

(1) $\sin(kx-wt)$

$$\sin(kx-wt)=\sin[k(x-\frac{w}{k}t)]=f(x-vt) \quad \textbf{where } v=\frac{w}{k}$$

或檢視其是否為波動方程式之解

機械波

$$\frac{\partial^2 \sin(kx-wt)}{\partial x^2} = -k^2 \sin(kx-wt)$$

$$\frac{\partial^2 \sin(kx-wt)}{\partial t^2} = -w^2 \sin(kx-wt)$$

$$\frac{\partial^2 \sin(kx-wt)}{\partial t^2} = \frac{w^2}{k^2}\frac{\partial^2 \sin(kx-wt)}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 \sin(kx-wt)}{\partial x^2}$$

Therefore $v = \frac{w}{k}$

(2) $f(x,t) = x^2 + v^2 t^2$

看起來似乎不像波動函數。先檢查是否合於波方程式：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 2v^2,\ \textbf{therefore}\quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

結果合於波動方程式且波速為v!!

機械波

$$f(x,t) = x^2 + v^2 t^2 = \frac{1}{2}\left(x^2 + 2vt + v^2 t^2\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - 2vt + v^2 t^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}(x+vt)^2 + \frac{1}{2}(x-vt)^2$$

機械波

週期性的波動（Periodic Wave）

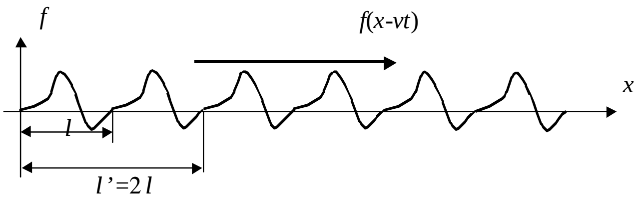
A. **基本定義**

假如$f(x)$**為**x**之週期性函數，即**

$$f(x+n\ell)=f(x)$$ **（週期性條件），其中**n**為整數**

則 $f(x\mp vt)$ **為一週期性之傳遞波**(traveling wave)。

合於週期性條件之最小大於零之ℓ**稱為波長** l (wavelength)。



中興大學物理系 孫允武 機械波一-9

機械波

B. **弦波**(sinusoidal wave)—**最基本的週期波**

$$g(x)=A\cos(kx+d)$$

A: **振幅**(amplitude)

d : **相位**(phase)，**和零點（時間和空間）的選擇有關。**

$$g(x\mp vt)=A\cos[k(x\mp vt)+d]$$

$\boxed{**\ k\ \&\ l}$

選擇時間t**使得** $\mp kvt+d=0$ **由週期性條件：** $g(x+nl)=g(x)$

$$A\cos[k(x+nl)]=A\cos(kx)=A\cos(kx+nkl)$$

比較可知 $$l=\frac{2p}{k}\quad \textbf{or}\quad k=\frac{2p}{l}$$

k: angular wave number or wave number（**角波數或波數**），**單位**rad/m

中興大學物理系 孫允武 機械波一-10

機械波

$**\ T\ \&\ w$

在空間某點x_0 $\boxed{g}(x_0 \mp vt) = A\cos[k(x_0 \mp vt) + d] = A\cos[\mp kvt + \underbrace{kx_0 + d}_{d}]$

$$= A\cos[\underbrace{kv}_{w}t \mp d']$$

$$w = kv = \frac{2p}{T} = 2pf$$

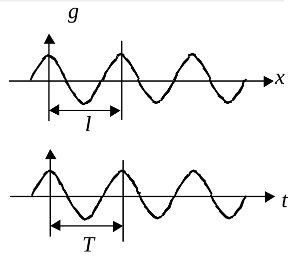
w : angular frequency（**角頻率**）[rad/s]

f: frequency（**頻率**）[Hz=1/s]

T: period（**週期**）[s]

$$v = \frac{w}{k}$$

phase velocity（**相速度**）



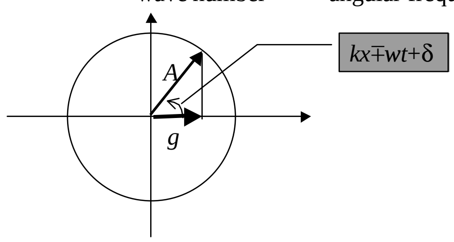
機械波

$$v = \frac{w}{k} = \frac{2p/T}{2p/l} = \frac{l}{T} = lf$$

direction

$$g(x \mp vt) = A\cos[kx \mp wt + d]$$

amplitude wave number angular frequency phase constant

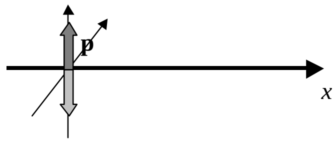


機械波

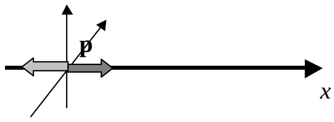
波的極化方向 （Polarization of Waves)

$$\mathbf{g}(x\mp vt)=\mathbf{p}\cos[kx\mp wt+d\,]=\hat{\mathbf{p}}p\cos[kx\mp wt+d\,]$$

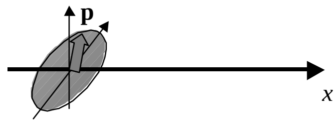
若振動的物理量為一向量，此向量的方向即為波的極化方向。



Transverse Wave (**橫波**)

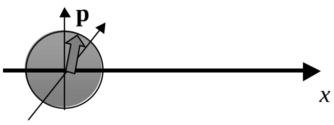


Longitudinal Wave (**縱波**)

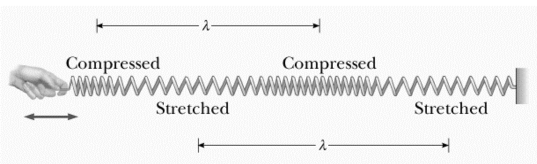


Circular Polarized Wave (**圓形極化波**) **（橫波）**

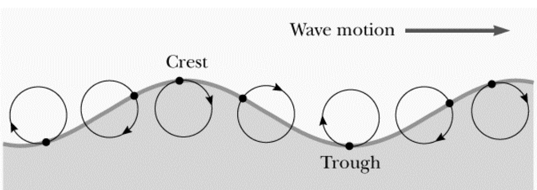
機械波



Circular Polarized Wave (**圓形極化波**)
（橫波+縱波）



Compressional Wave



Surface Wave

(Rayleigh Wave)