機械波

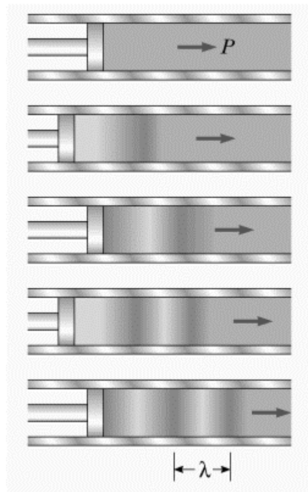
聲波與基本聲學

(Sound Waves and Acoustics)

空氣中聲波的傳遞

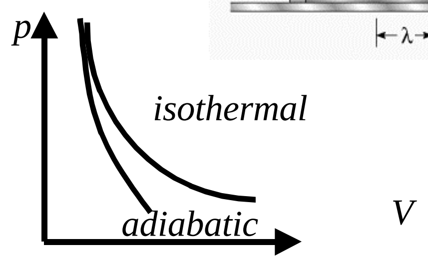
聲速**(speed of sound)**

聲波為縱波（壓力波），波速和B (bulk modulus)**有關，**



$$u = \sqrt{\frac{B}{r}}$$ (Newton, 1687)

空氣的bulk modulus $B \equiv -\dfrac{dp}{dV/V}$ 和過程有關



機械波

若為等溫過程，$pV=nRT$,

$$pdV + Vdp = 0,\quad \frac{dp}{dV} = -\frac{p}{V} \Rightarrow B_{\text{isothermal}} = p$$

用此結果代入所得之聲速較實際值小。

在聲音的傳遞，速度很快，空氣和周圍來不及做熱交換，要考慮絕熱過程，即

$$u = \sqrt{\frac{B_{\text{adiabatic}}}{r}} = \sqrt{\frac{B_a}{r}}$$

$$pV^g = const.$$

$$dp \cdot V^g + gpV^{g-1}dV = 0,\ \frac{dp}{dV} = -\frac{gp}{V} \Rightarrow B_a = gp$$

$$u = \sqrt{\frac{gp}{r}}$$

機械波

在STP (0℃ 1atm)狀態下乾空氣之g=1.402，r=1.293 kg/m^3，聲速為

$$u=\sqrt{\frac{1.402\times1.013\times10^5\,\mathrm{Pa}}{1.293\mathrm{kg/m^3}}}=331.4\mathrm{m/s}$$

聲速的溫度效應

$$u=\sqrt{\frac{gp}{r}}=\sqrt{\frac{g\,nRT/V}{M/V}}=\sqrt{\frac{gRT}{M/n}}=\sqrt{\frac{gRT}{M_0}}\propto\sqrt{T}$$

$$\Delta u=\sqrt{\frac{gR(T+\Delta T)}{M_0}}-\sqrt{\frac{gRT}{M_0}}=\sqrt{\frac{gRT}{M_0}}\left(\sqrt{1+\frac{\Delta T}{T}}-1\right)$$

M_0是平均分子量。

假如$\Delta T/T<<1$,

$$\Delta u=\sqrt{\frac{gRT}{M_0}}\left(\sqrt{1+\frac{\Delta T}{T}}-1\right)\approx\sqrt{\frac{gRT}{M_0}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T}-1\right)=u_0\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T}\right)$$

機械波

又氣體之方均根速率 $u_{\mathrm{rms}}=\sqrt{\frac{3RT}{M_0}}$ ，聲速可寫為$u=u_{\mathrm{rms}}\sqrt{\frac{g}{3}}$ 。

對於雙原子分子，g =1.4, u =0.68 u_{rms}。

例題

(a)He在STP, M_0=4.00 kg/kmole, g =5/3

$$u=\sqrt{\frac{\frac{5}{3}\times8.314\times10^3\,\mathrm{J/kmole\cdot K}\times273\mathrm{K}}{4.00\mathrm{kg/kmole}}}=972\mathrm{m/s}$$

＊＊吸一口He氣體，講話音調會變高，為什麼？

(b)在22℃的聲速

$$u=u_0\sqrt{\frac{T}{T_0}}=331.4\times\sqrt{\frac{295.15}{273.15}}\mathrm{m/s}=344.5\mathrm{m/s}$$

在室溫附近溫度變化1度，聲速變化約0.6 m/s。

機械波

聲波中氣體分子的平均位移與壓力變化

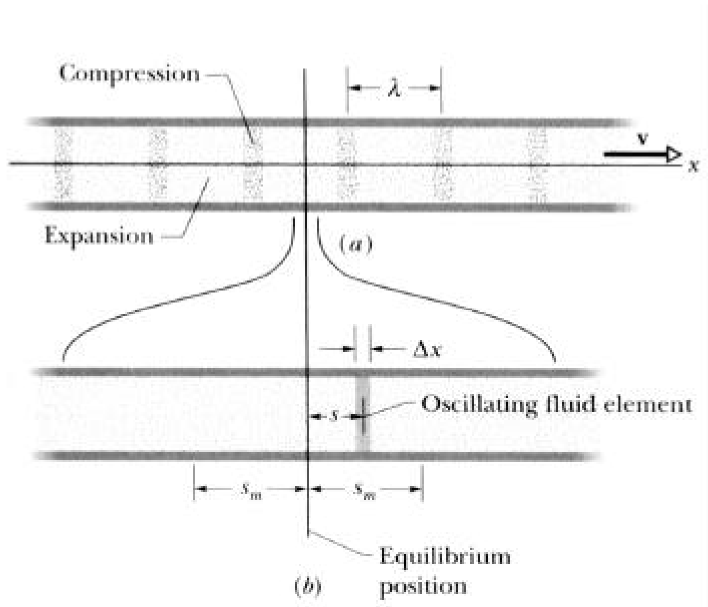
聲波為壓縮波，氣體之某一體積元素(Δx)的位置隨時間對平衡位置做來回振動。

考慮某固定時間(定為t=0)，若氣體分子的平均位移(displacement)寫為

$$s(x,0) = s_m \cos kx$$

則壓力變化(Δp)為

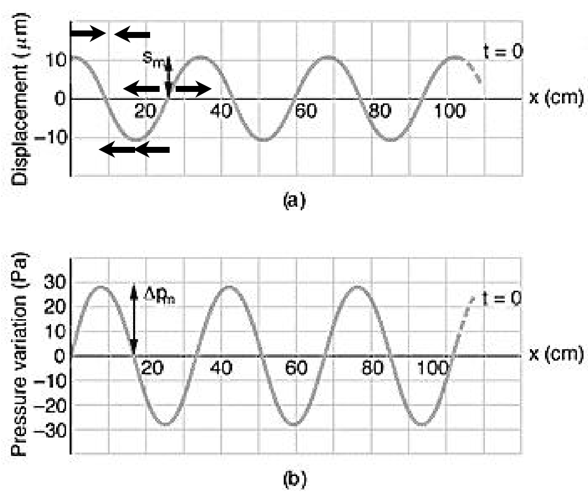
$$p(x,0) = p_m \sin kx$$



機械波

故$s(x,t)$**和**$\Delta p(x,t)$**可寫為**

$$s(x,t) = s_m \cos(kx - wt)$$
$$\Delta p(x,t) = \Delta p_m \sin(kx - wt)$$



仔細的推導

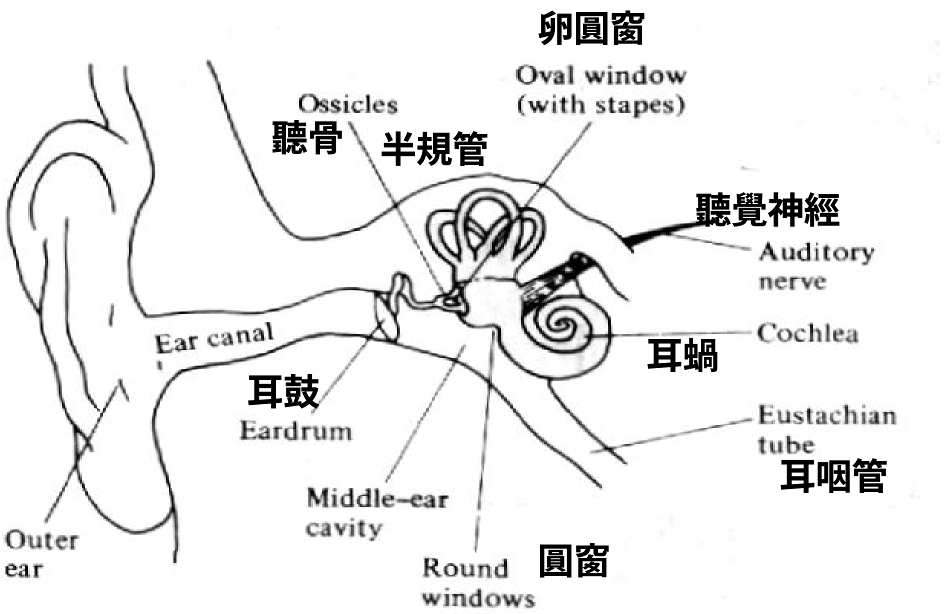
$$\Delta p = -B\frac{\Delta V}{V} = -B\frac{A\Delta s}{A\Delta x} \rightarrow \Delta p = -B\frac{\partial s}{\partial x}$$

$$\Delta p = -B\frac{\partial s}{\partial x} = -B[-s_m k \sin(kx - wt)]$$
$$= s_m Bk \sin(kx - wt) = \Delta p_m \sin(kx - wt)$$
$$\Rightarrow \Delta p_m = s_m Bk = s_m k r u^2 = (urw)s_m$$

機械波

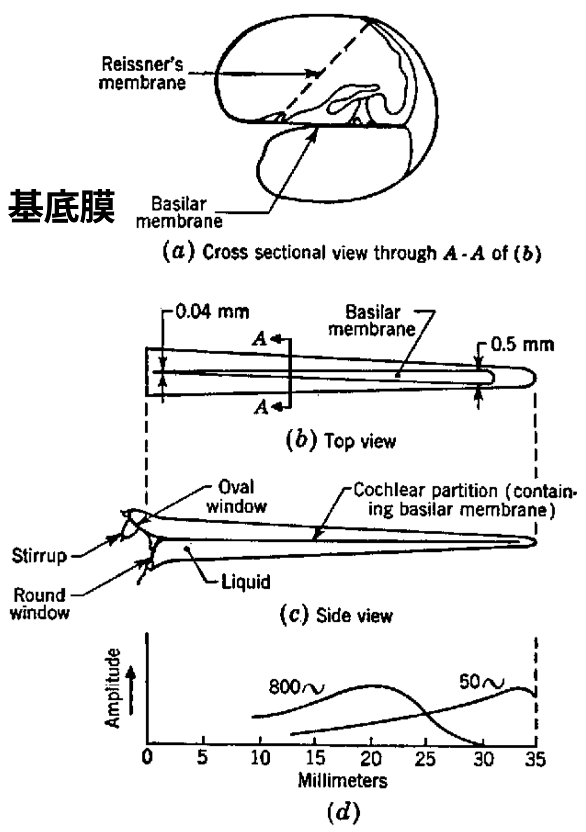
聽覺(Hearing)

耳朵的結構



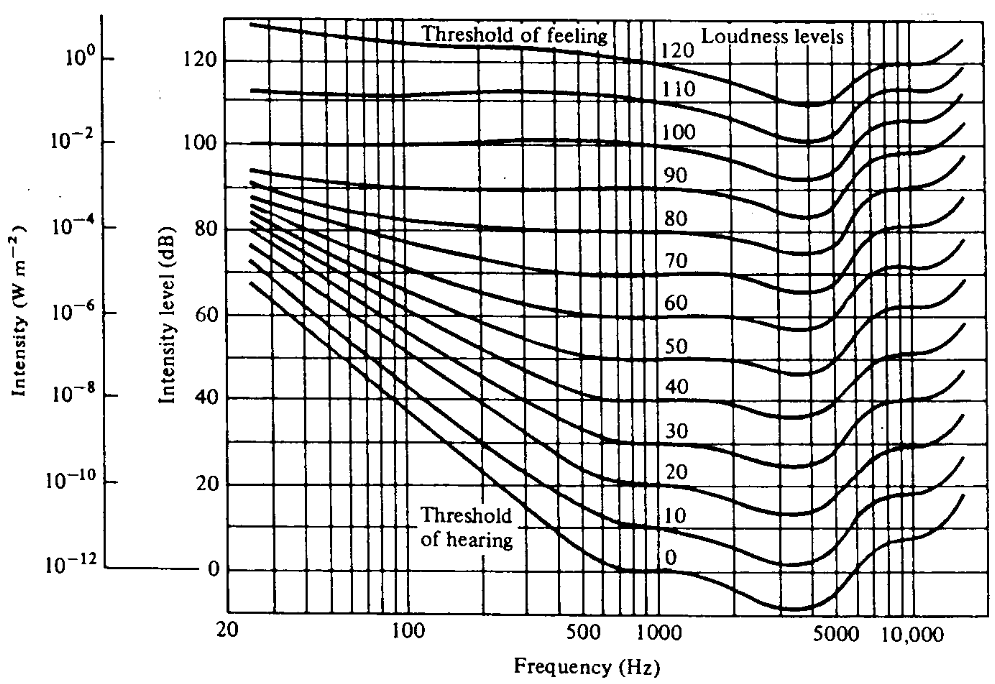
機械波

耳蝸(cochlea)**內的結構**



機械波

對音量的反應



機械波

聲音的強度(Intensity)

$$I = \frac{P}{A} \quad [\mathrm{W/m^2}]$$

即單位時間通過單位面積之能量。
P: the rate of energy transfer (power)。

通常聲音的強度是以分貝(dB, decibel)**來表示。分貝通常是用來表示變化範圍很大**(**涵括幾十個數量級**)**的物理量。由上頁之資料知人所接受到的聲音強度變化有**12**個數量級！！而且耳朵對音量的感覺和**log$I$ **成正比。**

音量(Sound Level)**的定義**

$$b \equiv (10\mathrm{dB}) \log \frac{I}{I_0}$$

I_0:**標準參考強度，選擇為**10^{-12} W/cm^{-2} (threshold of hearing)。

機械波

一些常見的音量大小：

threshold of hearing	0dB
音樂	20~100dB
蚊子聲音	40dB
對話	60dB
大街	70~80dB
低音大鼓	94dB
threshold of pain	120dB
飛機起飛	150dB
耳朵馬上受傷	160dB

強度增加為原來兩倍，音量增加3dB**，十倍則為**10dB**。**

強度成等比級數增加，則音量成等差級數增加。

機械波

聲音強度與空氣分子位移振幅s_m的關係

先計算平均傳遞的動能，平均的位能則與動能相同。
考慮一片厚為dx的空氣分子體積元素，其動能為

$$\left.\begin{aligned} dK &= \tfrac{1}{2}\,dm\cdot u_s^2 \\ u_s &= \frac{\partial s}{\partial t} = -\omega s_m \sin(kx-\omega t) \end{aligned}\right\} dK = \tfrac{1}{2}(\rho A dx)\omega^2 s_m^2 \sin^2(kx-\omega t)$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dK}{dx}\frac{dx}{dt} = \tfrac{1}{2}\rho A u \omega^2 s_m^2 \sin^2(kx-\omega t)$$

$$\overline{\left(\frac{dK}{dt}\right)} = \tfrac{1}{2}\rho A u \omega^2 s_m^2 \overline{\sin^2(kx-\omega t)} = \tfrac{1}{4}\rho A u \omega^2 s_m^2$$

$$P = 2\overline{\left(\frac{dK}{dt}\right)} = \tfrac{1}{2}\rho A u \omega^2 s_m^2$$

$$\boxed{I = \frac{P}{A} = \tfrac{1}{2}\rho u \omega^2 s_m^2 = \frac{(\Delta p_m)^2}{2\rho u}}$$

機械波

例題

The faintest sounds the human ear can detect at a frequency of 1000 Hz correspond to an intensity of about 1.00×10^{-12} W/m^2-the so-called threshold of hearing. The loudest sounds the ear can tolerate at this frequency correspond to an intensity of about 1.00 W/m^2-the threshold of pain. Determine the pressure amplitude and displacement amplitude associated with these two limits.

For I= 1.00×10^{-12} W/m^2

$$\Delta p_m = \sqrt{2 r u} = \sqrt{2(1.20\,\text{kg/m}^3)(343\text{m/s})(1.00\times10^{-12}\,\text{W/m}^2)}$$
$$= 2.87\times10^{-5}\,\text{N/m}^2$$

1 atm ~10^5 N/m^2!!!

$$s_m = \frac{\Delta p_m}{r u w} = \frac{2.87\times10^{-5}\,\text{N/m}^2}{(1.20\,\text{kg/m}^3)(343\text{m/s})(2p\times1000\text{Hz})}$$
$$=1.11\times10^{-11}\,\text{m}$$

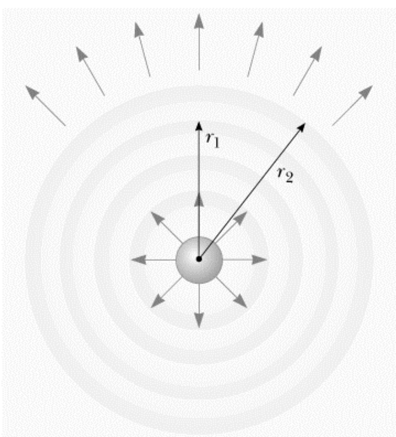
For I= 1.00W/m^2 $\quad \Delta p_m = 28.7\text{N/m}^2,\quad s_m = 1.11\times10^{-5}\,\text{m}$

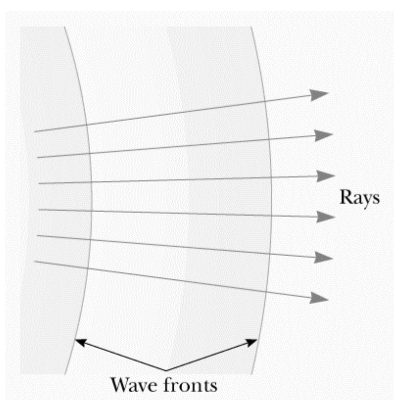
機械波

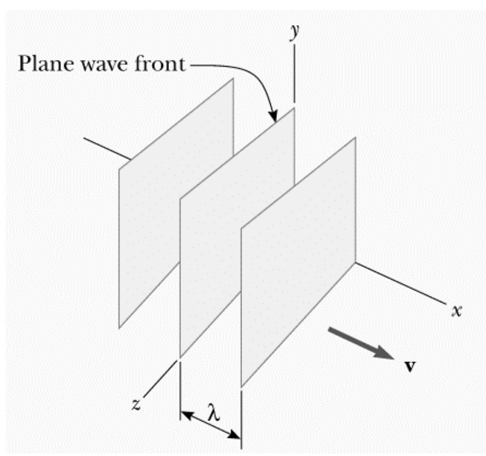
球面波與平面波

一點聲源向四面八方傳遞能量，功率為P_{av}，和通過任一半徑r之球面之平均能量和r無關，因此

$$I = \frac{P_{\text{av}}}{A} = \frac{P_{\text{av}}}{4pr^2}$$,**故** $$s_m \propto 1/r$$







球面波的波函數ψ (psi)

$$y\,(r,t)=\frac{s_0}{r}\cos(kr-wt)=\mathrm{Re}\left[\frac{s_0}{r}e^{i(kr-wt)}\right]$$

取實數

波前(wave front)**是平行的平面時稱為平面波**(plane waves)**，波函數為**

$$y\,(x,t)=A\cos(kx-wt)=\mathrm{Re}\left[Ae^{i(kx-wt)}\right]$$

或

$$y\,(\mathbf{r},t)=A\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-wt)=\mathrm{Re}\left[Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-wt)}\right]$$

k稱為波向量(wave vector)**，方向為波傳遞的方向。**