六、振動(Oscillations)

6.1 等速圓周運動與簡諧運動(SHM *Simple Harmonic Motion*)

在第四章我們得知，當質點沿著曲線運動時，其加速度（源自約束力）為

$$\mathbf{a}=\ddot{s}\mathbf{t}+\frac{\dot{s}^2}{r}\mathbf{n}=a_t\mathbf{t}+a_r\mathbf{n}$$

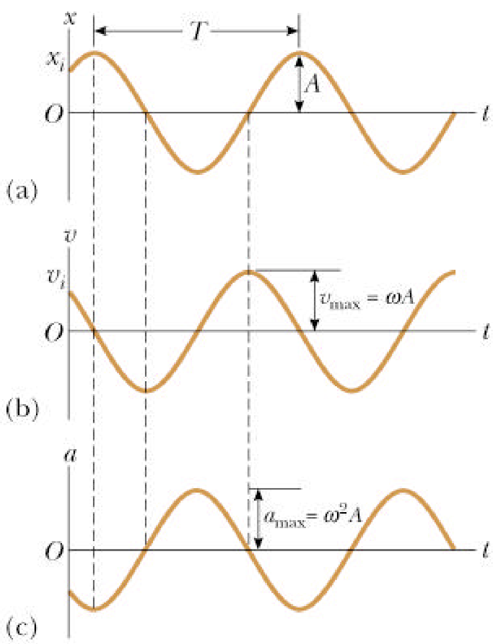
考慮等速圓周運動的情況時，切線加速度 a_t **為零，而法線加速度** a_r **為** $r\omega^2=v^2/r$ ($r=r$)**，方向為朝向圓心。在第一章運動學時知道，若以直角座標系描述等速圓周運動，則其位移為**

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j} \quad \& \quad x=r\cos(\omega t+\phi) \quad y=r\sin(\omega t+\phi)$$

而其速度與加速度為

$$\mathbf{v}=v_x\mathbf{i}+v_y\mathbf{j} \quad where \quad v_x=-r\omega\sin(\omega t+\phi) \quad v_y=r\omega\cos(\omega t+\phi)$$

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j} \quad where \quad a_x=-r\omega^2\cos(\omega t+\phi)=-x\omega^2 \quad a_y=-r\omega^2\sin(\omega t+\phi)=-y\omega^2$$



若只考慮等速圓周運動於一維方向的分量運動（如 x **軸分量），則其位移（如上面式子所示）隨時間的變化將為一簡單的正弦（或餘弦）函數（如圖），一般稱此運動為簡諧運動**(SHM)。**我們定義當位移經過一固定的時間** T **之後，會完全重複原先的變化，也就是對任意時間** t **而言** $x(t+T)=x(t)$**皆會成立，則我們稱此運動為週期性運動，而** T **為該運動的週期(*period*)。由此可知，上述運動的週期為（繞一圈或角位移為** 2π**所需時間）**$T=2\pi/\omega$**。習慣上，我們常以每單位時間內週期性運動重複幾次來描述此週期性運動，我們稱之為週期性運動的頻率(*frequency*)** f**，**$f=1/T=\omega/2\pi$**，而**ω**稱之為該運動的角頻率(*angular frequency*)。頻率的單位為** s^{-1} **或** hertz (Hz)**。正弦（或餘弦）函數中的變數值**($\omega t+\phi$)**被稱為該運動的相位(*phase*)，所以對圓周運動而言，速度與位移的相位差為** 90^o **或**$\pi/2$**，而加速度與位移的相位差為** 180^o **或**π**。**

以動力學的觀點來看，簡諧運動為物體受力致使運動狀態隨時間而變化，而其受力大小根據牛頓運動定律為

$$F_x(t)=ma_x(t)=-mr\omega^2\cos(\omega t+\phi)=-m\omega^2x=-kx$$

所以簡諧運動的形成主要為物體受到一恢復力(*restoring force*)的影響，亦即受力的方向與偏離平衡點（受力為零之處）的位移方向相反，且此力的大小線性正比於其偏移量的大小。由此敘述我們知道，符合此狀況的最直接例子為彈簧系統。考慮彈性係數為 k 的彈簧系統中，一質量為 m 的物體連結於此彈簧上，當彈簧壓縮量為 x 時，物體所受的力為

$$F = ma = -kx = m\ddot{x} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

這顯示此物體的位移滿足微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \qquad define \qquad w^2 = \frac{k}{m} \qquad \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -w^2 x$$

滿足此微分方程之解的一般形式為

$$x = A\cos wt + B\sin wt \quad \text{或} \quad x = C\sin(wt + f); \quad \text{其中} \quad C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad f = \tan^{-1}(A/B)$$

此為前面所敘述的簡諧運動，而其週期與頻率為

$$T = \frac{2p}{w} = 2p\sqrt{\frac{m}{k}}; \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

例題一：一質量為 1300kg 車子的避震器彈性係數為 20,000N/m。當它乘載兩個人總質量為 160kg 時，路經一坑洞使得車子上下震動，問其振動頻率為何？

由上式結果

$$f = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{20000N/m}{350kg}} = 1.18Hz$$

例題二：一 0.5kg 的物體連接在彈性係數為 20N/m 的彈簧上，沿著無摩擦力的水平面做簡諧運動。（一）假若此物體的振幅為 3.0cm/s，求此系統之能量與該物體之最大速度。

由第三章中運動常量所導致的守恆量為

$$E = K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = const. \quad \Rightarrow \quad E = \tfrac{1}{2}kx_{\max}^2 = 9.0\times10^{-3}J$$

$$E = K + U = \tfrac{1}{2}mv_{\max}^2 \quad \Rightarrow \quad v_{\max} = 0.19m/s$$

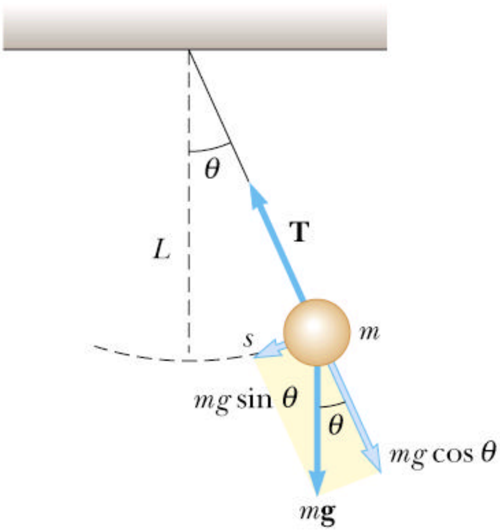
（二）當為移量為 2.0cm 時，物體的速度為何？

$$v = \pm\sqrt{\frac{E}{m} - \frac{kx^2}{2m}} = \sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)} = \pm 0.141m/s$$

6.2 單擺(*Simple Pendulum*)與物理擺(*Physical Pendulum*)

單擺為另一種常見的做週期運動的機械裝置。考慮一長度為 L，質量可忽略的繩子，其一端固定，另一端繫一質量為 m 的物體。當其與垂直線夾一微小角

度時，因重力的因素會使該物體回到垂直位置（如圖所示）。由牛頓定律我們有



$$\sum F_t = -mg\sin q = m\frac{d^2 s}{dt^2}$$

當角度不大時，sinθ ≈ θ。再將弧長 s = Lθ代入，單擺的運動方程可重新寫為

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = -\frac{g}{L}q$$

此運動方程與由彈簧系統所得到的微分方程一樣，所以符合此運動方程的解為

$$q(t) = q_{\max}\cos(wt + f)$$

角位移對時間為一簡諧運動，擺動週期與頻率為

$$w = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad ; \quad f = \frac{w}{2p} = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{g}{L}} \quad ; \quad T = \frac{1}{f} = 2p\sqrt{\frac{L}{g}}$$

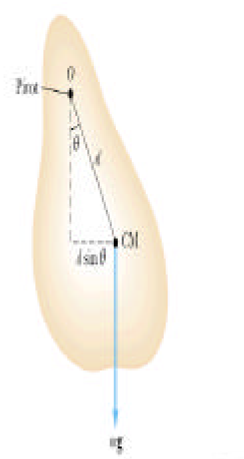
思考問題：若將繩子改為彈簧，彈簧掛上物體後的平衡長度為 L，問此擺的週期會大於、小於或等於繩子擺？

例題三：Christian Hyugens (1629-1659), the greatest clockmaker in history, suggested that an international unit of length could be defined as the length of a simple pendulum having a period of 1 s. What would it be in unit of meter?

Solving the equation above, we get

$$L = \frac{T^2 g}{4p^2} = 0.248m$$

假若擺的質量並非集中於擺長的另一端，而是須要考慮質量於空間的分佈（如圖所示），則我們稱此為物理擺(physical pendulum)。此問題可以剛體轉動運動來考慮。若已知物體的質心到轉動點(pivot point)的距離為 d，而此物體相對於此點的轉動慣量為 I，則因重力對此系統所施的力矩而產生的運動為滿足：



$$\sum t = -mgd\sin q = Ia = I\frac{d^2 q}{dt^2}$$

式子中的負號代表力矩的方向為減小角度值的方向。同樣的，我們考慮當擺動的角度不是很大時：

$$\sin q \approx q \Rightarrow \frac{d^2 q}{dt^2} = -\left(\frac{mgd}{I}\right)q = -w^2 q$$

由於此微分方程的形式與前面的一樣，故此擺動對角度值而言為一簡諧運動。其週期為

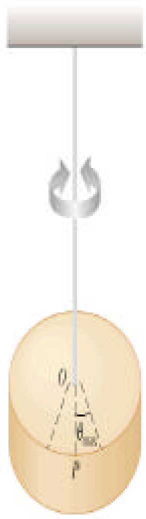
$$T = \frac{2p}{w} = 2p\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

例題四：A uniform rod of mass M and length L is pivoted about one end and oscillates in a vertical plane. Find the period of the oscillation if the amplitude of the motion is small.

We can find the moment of inertia in the previous chapter to be I = $ML^2/3$. Substituting these quantities into the equation gives

$$T = 2p\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{Mg\frac{1}{2}L}} = 2p\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

扭擺(*Torsional Pendulum*)



當物體為一長線所繫住時，以此線為軸，物體被扭轉一微小角度θ（如圖）。繩索因此角度扭轉而施予此物體一力矩，其大小與扭轉角度成正比，方向為減小此扭轉角度的方向。由此我們可以寫出此系統的運動方程為

$$t = -kq = I\frac{d^2q}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{k}{I}q = -w^2q$$

所以，扭擺亦為一簡諧運動。其頻率為

$$T = 2p\sqrt{\frac{I}{k}}$$

此系統稱為扭擺。在此我們並不強調扭轉角度大小的限制。只要此扭轉(twisting)**對此繩索而言仍然在彈性的範圍之內，力矩的大小與角度成正比的關係仍成立，上式的結果不變。**

6.3 阻尼諧振子(*Damped Oscillators*)

前面幾個章節所討論的簡諧振盪子皆為理想狀況下的結果，在實際的振盪系統中常常有耗散(dissipative)**的現象，如摩擦力、空氣阻力等的存在。因而，對實際的振盪系統而言，因有非保守力的存在，其力學能會隨時間的變化而減小，我們稱此類系統為擁有阻尼的**(damped)**。一般中較常見到的狀況為阻尼正比於運動速度的例子，考慮一系統的阻力**(retarding force)**為** ***R***=-*bv*，**恢復力**(restoring force)**為**-*kx*，**則由牛頓運動定律可得**

$$\sum F = -kx - bv = ma \quad \Rightarrow \quad -kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

此運動方程與所熟悉的簡諧運動微分方程差異於多出一次微分項。在此微分方程中，對函數 *x* **而言為齊次方程，故在解此類型的微分方程時，我們可以複數形式**

$$x = Ae^{\lambda t}$$

當成微分方程一般解的形式。首先將微分方程整理成

令 $\omega_o^2 = \dfrac{k}{m} \quad 2\gamma = \dfrac{b}{m} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\dfrac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = 0$

再將此一般解形式代入方程中可得特徵方程

$$\lambda^2 x + 2\gamma\lambda x + \omega_o^2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_o^2 = 0$$

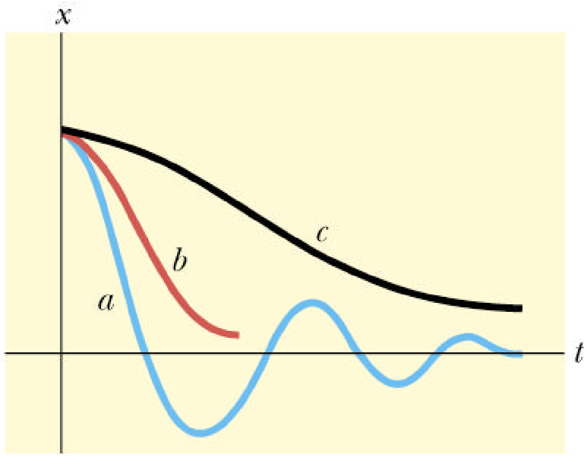
此特徵方程的兩個解為

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2} \quad \Rightarrow \quad x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

（一）過阻尼情況(overdamped oscillator)

$\gamma^2 > \omega_o^2$

此時特徵方程的兩個解不相等，且皆為負實數。由上列解的形式可知，x 為一指數衰減形式。故此運動不是振動，而是非週期性衰減運動。（如圖之(c)曲線）



（二）臨界阻尼情況(critical damped oscillator)

$\gamma^2 = \omega_o^2$

此時特徵方程的兩個解相等 $\lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma$，若將此結果代入一般解的形式中，僅能給出一個任意常數的解，故此並非最終的通解形式。數學上很容易證實，此時通解的形式應該為

$$x = (A_1 + A_2 t)e^{-\gamma t}$$

故此運動也不是振動，而是非週期性衰減運動。（如圖之(b)曲線）

（三）阻尼不足情況(underdamped oscillator)

$\gamma^2 < \omega_o^2$

此時特徵方程的兩個解為共軛複數，故其運動通解為一般解的實數部分

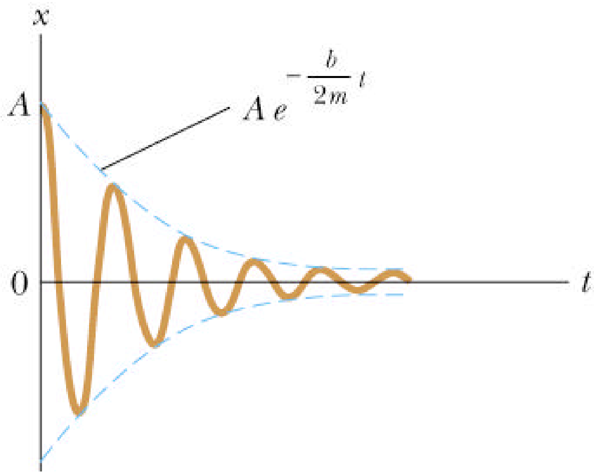
$$x = \mathrm{Re}\left\{e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{i\omega' t} + C_2 e^{-i\omega' t}\right)\right\}$$

其中指數函數為複數時可根據歐拉公式(Euler' s formula) $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$

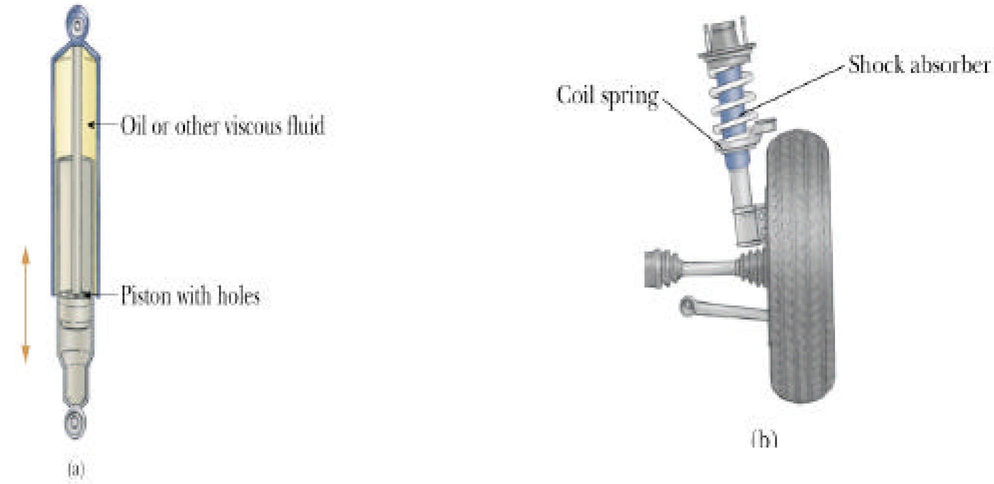
此形式有時亦可改寫成

$$\omega' = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}; C_1 = \tfrac{1}{2}A_o e^{i\theta}; C_2 = \tfrac{1}{2}A_o e^{-i\theta}$$

$$\Rightarrow x = A_o e^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \theta)$$



因此，在阻尼不足的情況下，振子的振動幅度隨時間呈指數衰減之諧振動。
思考問題： An automotive suspension system consists of a combination of spring and shock absorbers, as shown in the figure. If you were an automotive engineer, would you design a suspension system that was underdamped, critically damped, or overdamped?



6.4 受迫諧振子(*Forced Oscillator*)

假若對系統加一外力，在某些條件之下，則此力對系統所作之功，有可能剛好彌補因阻尼產生的能量消耗。習慣上我們稱有外力作用的振盪系統為，受迫諧振子。最常碰到的例子為阻尼振盪子受到一週期函數形式的外力驅動，譬如 $F = F_o \cos\omega t$，其中ω為外力週期之角頻率，而 F_o 為常數。所以受迫諧振子的運動方程為

$$\sum F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} + F_o\cos\omega t$$

為計算方便起見，我們將之改寫為

$$\omega_o^2 \equiv \frac{k}{m}, \quad 2\gamma \equiv \frac{b}{m} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = \frac{F_o}{m}\cos\omega t$$

因外力項的存在，使得此微分方程為非齊次方程。根據線性微分方程的理論，此方程的解為相對應齊次方程的通解與非齊次方程的任一特殊解之和。為方便求得特解，我們先求此方程的複數形式

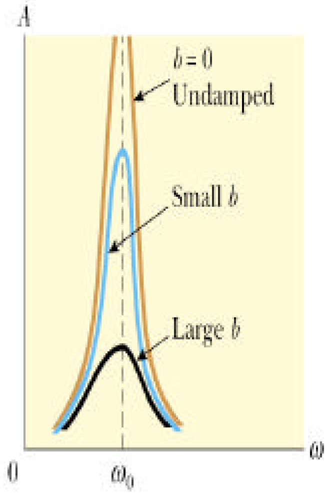
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = \frac{F_o}{m}e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \textbf{特殊解形式}\ x = Ae^{i\omega t} \Rightarrow \quad A(\omega_o^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega) = \frac{F_o}{m}$$

由此我們解得

$$x = \frac{F_o/m}{\omega_o^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega}e^{i\omega t} = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}e^{i(\omega t + \phi)} \qquad where \qquad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_o^2}\right)$$

取其實數部分即為此方程的特殊解，加上齊次方程的通解後，可得一般解形式為

$$x = c\cos(\omega t + \phi) + a e^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \theta)$$



，其中

$$c = \frac{F_o/m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} = \frac{F_o/m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

為了便於探討，我們將響應之振幅寫為

$$c = \frac{F_o/m}{\sqrt{\left(\omega^2 - \left[\omega_o^2 - 2\gamma^2\right]\right)^2 + 4\gamma^2\left(\omega_o^2 - \gamma^2\right)}}$$

（一）當ω=0 時，$c = \frac{F_o/m}{\omega_o^2} = \frac{F_o}{k}$。此時外力為常數，故最終結果為位移對平衡位置產生一靜偏移。

（二）當$0 < \omega < \sqrt{\omega_o^2 - 2\gamma^2}$時，響應振幅 c 隨ω的增加而遞增。

（三）當$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - 2\gamma^2}$時，響應振幅$c = \frac{F_o/m}{2\gamma\sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}}$達到最大。我們稱此頻率為共振頻率(resonance frequency)，而此時系統處於共振(resonance)狀態。由上列表示式得知，共振頻率與響應振幅的大小與阻尼有關。阻尼越小時，共振頻率越接近自然頻率ω_o，而響應振幅將越大。相對的，當阻尼變大時，共振頻率與響應振幅皆隨之減小，而當$\gamma \to \frac{\omega_o}{\sqrt{2}} = \gamma_c$時$\omega_r \to 0$。

（四）當$\omega > \sqrt{\omega_o^2 - 2\gamma^2}$時，響應振幅 c 隨ω的增加而遞減，並在頻率趨近於無窮大時，振幅變為零。

共振吸收及 Q 值

對於一受迫諧振子而言，能觀察或測量到的物理量，常常不是振幅，而是維持穩定振動所需的能量。考慮系統外力對系統所作之功率為

$$P = Fv = F\frac{dx}{dt} = m\left(\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x\right)\frac{dx}{dt} = m\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2 x\frac{dx}{dt}\right) + 2m\gamma\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}kx^2\right) + 2m\gamma\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{dE}{dt} + 2\Psi$$

上式中第二項為反抗阻尼所消耗之功，它永遠為正值。第一項為振子之力學能變

化，當振動進入穩定態之後，其週期平均值應為零$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_T = 0$，所以在振動進入穩定態之後的週期平均消耗功率為

$$\langle P \rangle = 2gm\langle \dot{x}^2 \rangle = 2gmc^2w^2\langle \sin^2(wt+f) \rangle$$

利用數學結果$\langle \sin^2(wt+f) \rangle = \langle \cos^2(wt+f) \rangle = \frac{1}{2}\langle \sin^2(wt+f) + \cos^2(wt+f) \rangle = 1/2$

我們可得

$$\langle P \rangle = gmc^2w^2 = \frac{gF_o^{\,2}w^2}{m\left[\left(w_o^2 - w^2\right)^2 + 4g^2w^2\right]}$$

這結果表示，系統對能量的吸收與頻率有關。習慣上，我們稱之為色散型(dispersive)的。由其函數形式可知，當$w = w_o$時，平均吸收功率到達最大。

$$\langle P \rangle_{\max} = \frac{F_o^{\,2}}{4mg}$$

當$\left(w_o^2 - w^2\right) = 2gw$時，平均吸收功率到達最大的一半。若阻尼不大$(g) << w_o$，則$w$與$w_o$非常接近，所以可得

$$w_o^2 - w^2 = (w_o + w)(w_o - w) \cong 2w(w_o - w)$$

$$\therefore w\big|_{\frac{1}{2}\langle P \rangle_{\max}} = w_o \pm g$$

此二w的差值$\Delta w = 2g$稱為共振吸收曲線的寬度(width)。由前面的定義$g=b/m$得知，當阻尼越小（或質量越大）時，吸收曲線的寬度愈窄，而吸收峰值愈高。換言之，此系統的選擇性愈強，而吸收量愈大。為了表示一振動系統的吸收特性，或所含的阻尼程度，一般常用品質因素(quality factor)Q 來描述，它定義為振子平均能量與於一個週期內所耗散的能量之比乘上 2π

$$Q \equiv 2p\frac{\langle E \rangle}{T\langle P \rangle} = 2p\frac{\left\langle \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mw_o^2x^2 \right\rangle}{(2p/w)2gm\langle \dot{x}^2 \rangle} = \frac{w^2 + w_o^2}{4gw}$$

在鄰近於共振時，w約等於w_o，所以

$$Q = \frac{w_o}{2g} = \frac{w_o}{\Delta w}$$

故欲增加系統吸收的選擇性時，則需減少阻尼，亦即提升 Q 值。然而由其通解的形式得知，阻尼小時瞬間變化項衰減越慢，使振子對驅迫力之響應得於較長時間之後方為主導，故常常得於選擇性與反應外力變化之忠實性之間取得協調。舉幾個例子：一般揚聲器的 Q 值約在 10 到 100 左右，水晶振盪約為 10^4，光譜線約為 10^9，而雷射共振可達 10^{14}！