貳、牛頓力學

1642 年伽利略(Galileo Galilei)去世，而在同年的聖誕節，牛頓(Isaac Newton)誕生於英國的鄉下。牛頓為早產兒，且其父親於他出生前三個月即去世，牛頓也因其母親改嫁而與祖母一同生活。牛頓因無法成為一個好的農夫，故在其舅舅的建議之下，被送往大學就讀。在此因緣際會之下，成就了一代偉大的科學家。

2.1　伽利略對運動的分析

自然運動

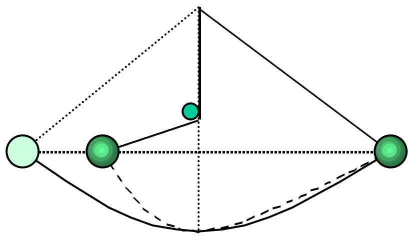
伽利略在運動學上的成就，奠定了牛頓動力學的基礎。伽利略成功的描述地球上物體的拋物運動，其主要基於兩個基本概念：

（一）自然加速運動　自然運動於垂直方向上的運動速度分量，會以一固定的速率增加。

（二）自然水平運動　自然運動於水平方向上的運動會以一固定的速率沿一直線行進。

革命的開始—由單擺到斜坡實驗

伽利略以實際的實驗證明，成功的挑戰亞理士多德所述自由掉落物體的速度為一定且與其重量成正比的概念。而在他的分析中，他體會到阻力的存在會影響實驗結果的，故太輕的物體如羽毛等將因空氣阻力而有不一樣的結果。另一個須克服的問題是，自由落體的速度太快，這造成了實驗觀測上的困擾，而伽利略的解決方法為讓運動速度慢下來。在單擺的實驗中，伽利略指出不論擺長的長短與擺的重量大小，單擺每次都會回到與其起始擺動一樣的高度。若在擺的垂直線上釘一根釘子，使得其左右擺動的長度不一樣，此論述仍然成立。由此可推論，不論物體掉落時所沿的路徑陡峭程度，自同一高度落下的物體所得到的最終速度是一樣的。因此，伽利略可利用斜坡降低物體下滑的速度研究自由落體的運動。他發現物體自靜止開始運動後，在每個一樣長的時間段內所走的距離依序為 1, 3 5, 7, …。若將每一時段所走的距離減掉前一時段所走的距離，其結果是每一時段皆多走了一樣的距離。這意味著，在每個一樣長的時間段內所獲得的速度，剛好與前一時段所增加的相等。換句話說，物體的自然掉落運動為等加速運動。



新的世界--慣性定理

在同樣的斜坡實驗中，若另一邊的斜率越來越小，則物體所走的水平距離將隨之變長，直到其垂直高度一樣時。在極限的情況下，另一邊的斜率為零，亦即呈水平狀態，此時物體將永遠無法達到一樣的高度，故若無其他阻力的存在，此物體應該永遠以一定的速度直線行走。所以伽利略指出，物體的自然水平運動為等速直線運動。此現象的推廣即為伽利略的慣性定理(Principle of

Inertia)：動者恆動，靜者恆靜。

2.2　牛頓運動定律

自然運動的整合

牛頓主要的突破在於將伽利略的兩個運動概念結合在一起，以同一觀念的不同角度去統合此二不同的運動。雖然伽利略也有力的想法，但是牛頓挾其新數學（微積分）的優勢，重新引進力的觀念，並以數學量化形式去描述運動，此為牛頓最重要的貢獻。牛頓重新對運動觀念的詮釋，整理成現今古典力學經典之作的牛頓力學三大定律。

牛頓的運動世界—慣性世界（牛頓第一運動定律）

牛頓對伽利略的拋物運動重新加以註釋，他說只要沒有空氣阻力和重力的拉扯，拋物體也會保持其起始的狀態。引用其原始描述，他對第一定律的說法為：

"*Every body perseveres in its state of rest, or of uniform motion in a right line, unless it is compelled to change that state by forces impressed thereon.*" –牛頓第一運動定律

此敘述簡捷的指出，只要沒有外在的干擾，物體傾向於保持其原有的運動狀態，故有人稱此定律為慣性定律(Law of Inertia)。此定律的重要性在於界定牛頓力學所描述的範疇，亦即所謂的慣性座標系統。其實地球本身並非一慣性座標系統，除了萬有引力之外，更有天體運動所引起的非慣性特質。幸好其他的所有作用加在一起，相對於重力是非常微小，故只要將重力也當成是外力，地球可被當成是一個慣性系統。

在伽利略的慣性世界裡，靜止與等速直線運動都是物體的原有狀態，這引起了一個相當有趣的討論問題。對一相對於地面分別是靜止和等速直線運動的兩人而言，二人彼此相看都會認為是對方在做等速運動。若這宇宙只剩他們兩人，其他的任何物體都不存在，則這兩人永遠無法確認是誰在做運動。因而當我們欲描述其中某一人正有"運動狀態" 改變時，不應該指位置對時間的變化。想想看，若只因位置對時間有變化即代表有"運動狀態" 改變，那這兩人皆會認為自己是保持原狀，而相互指證是對方在改變。物理定律不應因不同的人做觀測，會有不同的結果。

什麼是運動狀態的變化

牛頓深刻的瞭解慣性定律的啟示，因而他進一步的敘說：

“*The alteration of motion is ever proportional to the motive force impressed; and is made in the direction of the right line in which that force is impressed.*” –牛頓第二運動定律

雖然基本上是承接前一個敘述：在慣性世界裡，所有的物體皆保持其原有的運動狀態；故若有任何的運動狀態改變，必然是由於外來的干擾，而牛頓稱此干擾為”力”。此敘述不僅提出了為何運動狀態會改變，更重要的在於它提供了一可定量描述運動狀態是如何改變的。在此他引進了兩個新的定義，那就是”運動量”與”力”。在牛頓的慣性座標中，靜止與等速運動是沒有差別的，故他所謂的運動狀態的改變指的是有運動速度的增減，亦即物體有加速度。此加速度的大小與施力成比例，且方向相同。

何謂質量？何謂重量？

牛頓清楚的明白，同樣的外界干擾作用於不同的物體時，物體所得的加速度並不一樣。屬於物體的這種特性，決定該物體改變其運動速度的難易程度，牛頓稱此物質特性為該物體的”慣量”(inertia)又稱質量。根據此概念，物體質量的量測應以其對運動速度變化的影響而決定。然而，在地球上我們卻發現一較簡單的替代方法，那就是量測重量。由於所有物體的自然垂直運動皆為等加速度運動，故其所受的重力必然正比於其慣量的大小。物體所受重力的大小，可以簡單的運用各類的秤去量測，而人們一貫的稱此為重量。因此雖然慣量的量測不一定要靠重力來決定，但習慣上我們還是常以其重量的大小做為其慣量的依據。

牛頓第二運動定律的數學描述

若以上對慣量的定義能被接受，則牛頓第二定律的描述可以數學形式表達為

$$F = m\frac{dv}{dt} = m\dot{v} = ma$$

此為一般所熟知的牛頓第二運動定律的形式。力的定義可由此予以一定量的描述，即力的大小為物體質量乘以其加速度。所謂單位力的大小，自然而然的等於單位質量（通常為公斤）乘以單位加速度（公尺每秒平方），我們稱此單位為一<u>牛頓</u>。

至此，我們可清楚的體會一物體的”運動量”除了其速度外，也與其慣量有關。所以一新的數量概念可由此產生，我們定義描述物體運動狀態量的大小等於其質量乘以其運動速度，稱之為”動量”(momentum)。所以牛頓第二定律可更明確的敘述為

”*The time-rate-of-change of a quantity called momentum is proportional to the force*”。

數學上可寫為：

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = \frac{dp}{dt}(= m\frac{dv}{dt}\ \ when\ m\ is\ a\ constant)$$

牛頓第三運動定律—作用力與反作用力

在定義物體的運動狀態與建立力為其變化的主因的同時，牛頓注意到一非常重要的關鍵：兩物體之間力的作用，為彼此相互存在的，且其大小相等方向相反。引用牛頓的原文，他述說：

"*To every action there is always opposed an equal and opposite reaction: or the mutual actions of two bodies upon each other are always equal, and directed to contrary parts.*" –牛頓第三運動定律

數學上我們常以 $\mathbf{F}_{AB}$($\mathbf{F}_{BA}$)表示物體 B(A)**作用在物體** A(B)**上之力，$\mathbf{F}_{AB}$ 及 $\mathbf{F}_{BA}$ 之大小相等方向相反**($\mathbf{F}_{AB}=-\mathbf{F}_{BA}$)**，其中之一若當作作用**(action)**，另一者則為反作用**(reaction)。 **數學表示式上雖為 $\mathbf{F}_{AB}+\mathbf{F}_{BA}=0$，但由於是作用在不同物體上，故對個別物體而言是不能互相抵消掉。直覺上，這描述似乎蠻單純的能引起多數人的認可，然而其重要性是超乎只是直觀的認同。於下一章節中我們會詳加討論如何由第三運動定律導出基本的守恆律。**

牛頓定律運用的例子

類似於運動學的問題，動力學題目可簡略的以求和與求變兩不同思考類型區分。所謂求和問題是指，當系統的受力狀況為已知時，我們可由此推算在 t 時間之後，該系統之各部分於此受力條件下，因運動狀態變化所累積的速度與位移等的變化量為何？所謂求變問題是指，觀察量測系統的位移與時間的關係，據此可計算該系統運動狀態的變化，並進一步求得系統的受力狀況。

詳細的靜力平衡系統會在第六章重新探討，在此我們僅侷限於靜止或等速運動系統。通常於解題時，有幾個建議步驟：

（一）畫一系統示意簡圖。

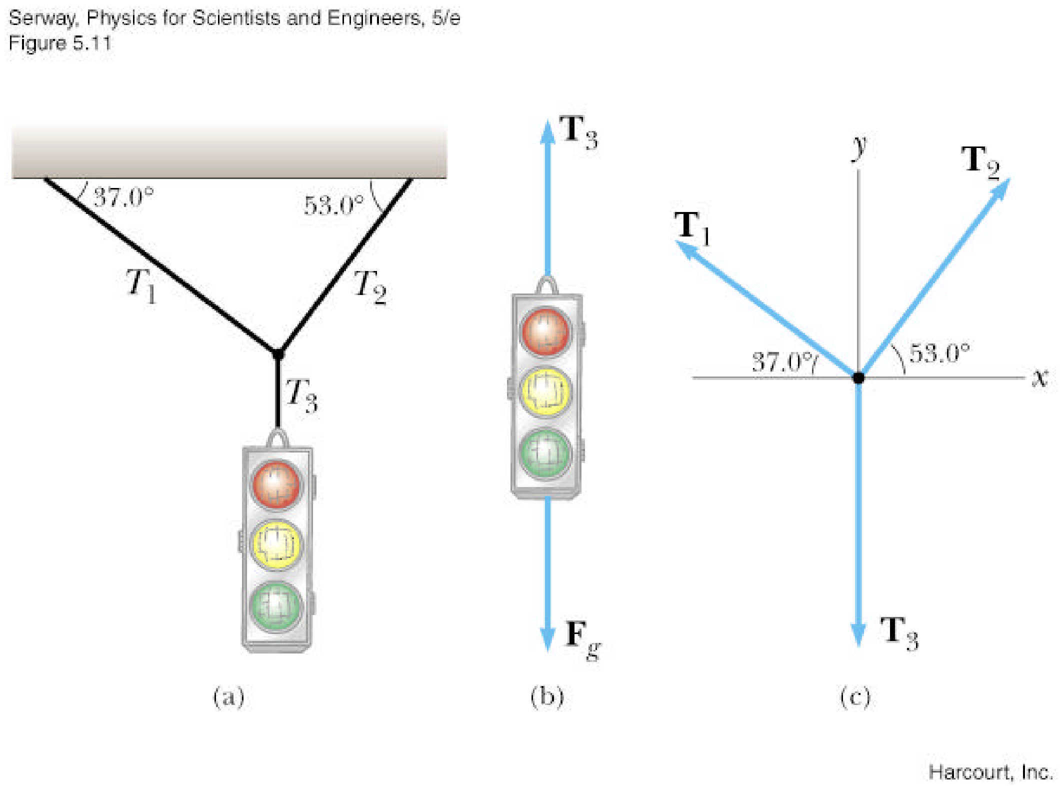
（二）分離各個不同物體，令每個皆為獨立系統，對各個物體作所有"外力"的作用圖。

（三）慎選座標系，找出牛頓第二運動定律 $\sum \vec{F} = \sum m\vec{a}$ 各個分量的結果。

（四）對各個分量獨立分析計算，以求取未知量。

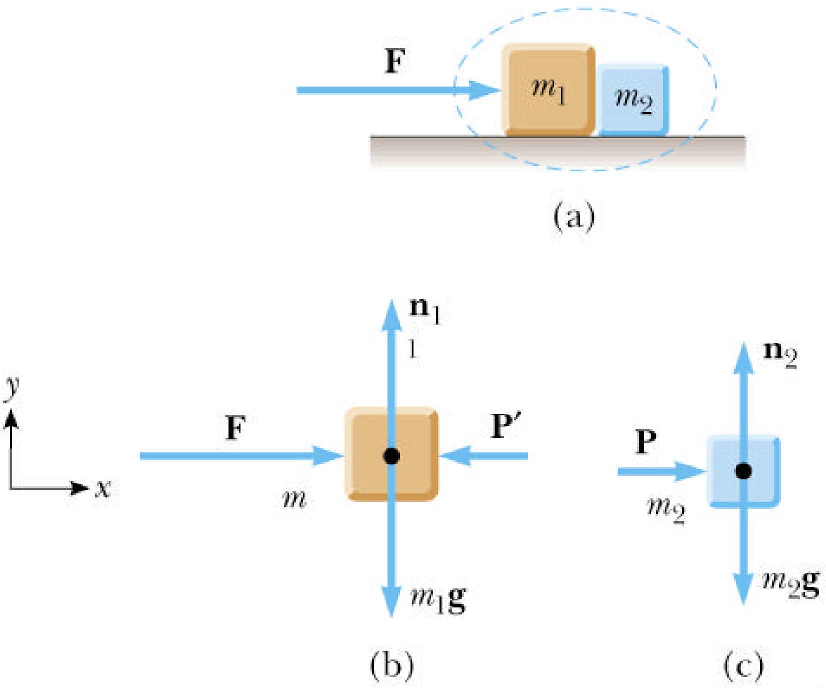
（五）確定（四）的結果與（二）的分析圖一致，並利用極端時（某一量趨近於零或無窮大時）的結果去驗證。

例題一：重 125N 的交通號誌以二電纜線支撐（如下圖所示），請求出每根纜線的張力。



例題二：一已知外力 F 作用於相接觸的二物體上，求此二物體之加速度與相互之間的力。

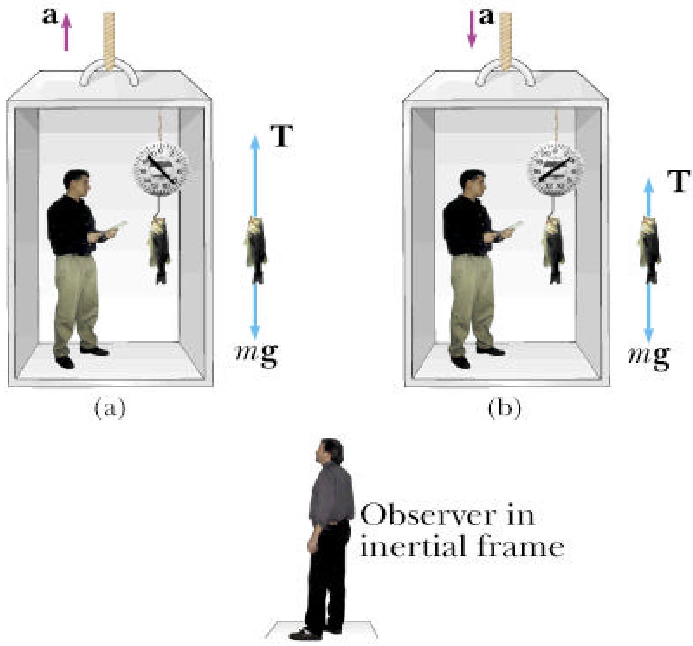
Serway, Physics for Scientists and Engineers, 5/e
Figure 5.13



Harcourt, Inc.

例題三：於電梯中測量一質量為 m 的魚，若電梯以等加速度 a 上昇或下降，問在此不同情況中所測得的重量應為？

Serway, Physics for Scientists and Engineers, 5/e
Figure 5.14

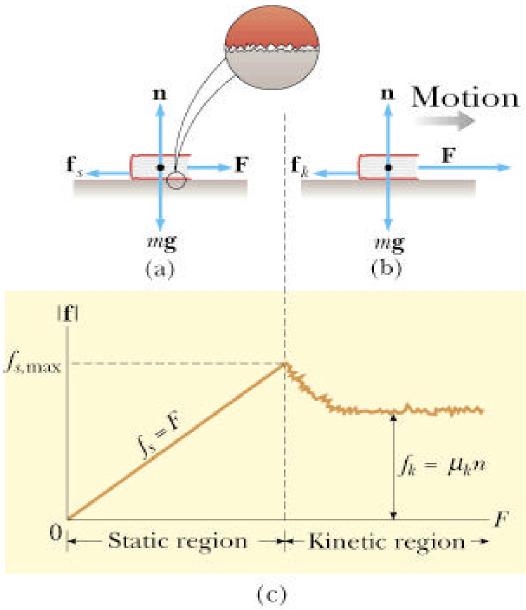


Harcourt, Inc.

考慮實際狀況時，物體之間的接觸面於微觀尺度為非平滑面，故會有摩擦力的

存在。由下圖的實驗數據顯示，摩擦力的大小與接觸面的垂直總力成正比，其比例常數稱為摩擦係數。靜止時，摩擦力為 $f_s \le m_s n$ ；運動時，摩擦力約為常數 $f_k = m_k n$。n 為垂直總力。

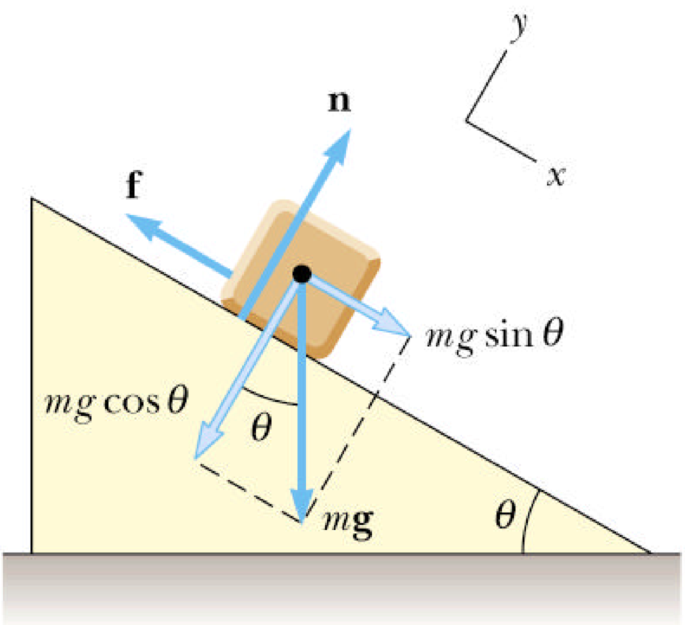
Serway, Physics for Scientists and Engineers, 5/e
Figure 5.17



Harcourt, Inc.

例題四：一質量為 m 的物體，置於一靜摩擦係數為 m_s 的斜坡上。慢慢增加斜坡的傾斜角，直至該物體剛好開始下滑，問該臨界角為何？

Serway, Physics for Scientists and Engineers, 5/e
Figure 5.19

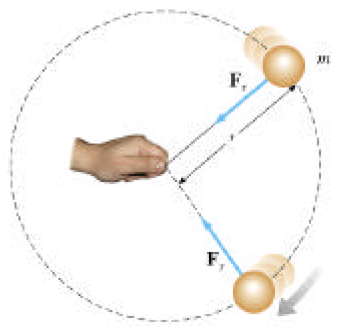


Harcourt, Inc.

若已知外力形式為常數或可積分之時間函數，則物體的速度與位移可由關係式 $v(t)=\int_0^t \frac{F(t`)}{m}dt`+v(0)$ 與 $r(t)=\int_0^t v(t`)dt`+r(0)$ 求得。

例題五：等速圓週運動　　若一質量為 m 之物體，欲以半徑為 r 做速度為 v 之等速圓週運動，求其所需之約束力。

Serway, Physics for Scientists and Engineers, 5/e
Figure 6.1



Harcourt, Inc.

由第一章運動學中得知，等速圓週運動的位置與時間的關係可寫為

$$x(t)=r\cos wt;\ y(t)=r\sin wt$$

由定義，速度與加速度為

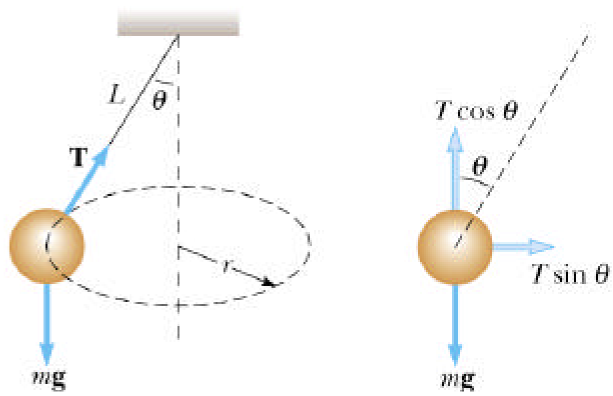
$$v_x(t)=rw\sin wt; v_y(t)=-rw\cos wt$$

$$a_x(t)=-rw^2\cos wt; a_y(t)=-rw^2\sin wt$$

綜合上列式子，我們可得到加速度為 $\vec{a}=\frac{v^2}{r}\frac{\vec{r}}{r}$。所以物體欲維持一等速圓週運動，則其所需力之大小為 $m\frac{v^2}{r}$，方向永遠指向圓心且與速度垂直。

例題六：圓錐擺　若一質量為 m 之物體，懸掛於一長度為 L 的線上。若該物體以半徑為 r 做一水平等速圓週運動，求其所需之速度。

Serway, Physics for Scientists and Engineers, 5/e
Figure 6.4

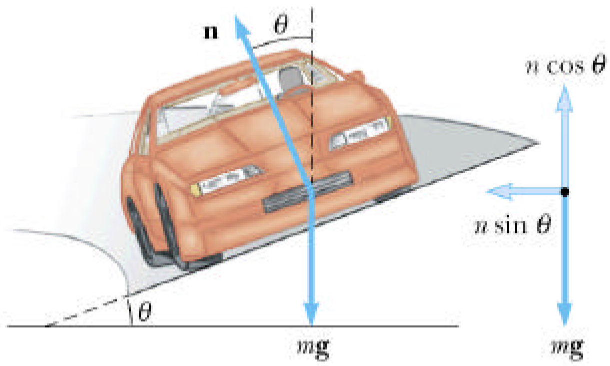


令繩子的張力為 T，則其垂直上的分量與重力達到平衡，而水平方向上之分量剛好提供水平等速圓週運動所需之束縛力。

$$T\cos\boldsymbol{q}=mg; T\sin\boldsymbol{q}=ma_r=mv^2/$$

Serway, Physics for Scientists and Engineers, 5/e
Figure 6.6

例題七：為減小高速公路交流道的迴轉半徑，出口的設計多半向內傾斜以彌補摩擦力的不足。若某交流道的半徑為五十



公尺，設計速限為 13.4m/s (30.0mi/h)**，假設摩擦力可忽略，則其路面傾角應為多少？**

車子於路面的垂直總力 n **於鉛垂方向分量應與重力相等，而於水平方向則剛好滿足圓週運動所需之束縛力。**

$$n\cos\theta = mg \qquad n\sin\theta = mv^2/r \qquad \Rightarrow \tan\theta = v^2/rg$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left[(13.4m/s)^2/(50.0m)(9.80m/s^2)\right] = 20.1^o$$

若已知外力形式非為常數或時間之函數，而是可積分之速度的函數，則物體的速度與位移可由牛頓運動定律得到：

$$m\ddot{x} = f(v) \quad \Rightarrow \quad m\dot{v} = f(v) = m\frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int dt = \int \frac{m}{f(v)}dv$$

$$m\ddot{x} = f(v) \quad \Rightarrow \quad f(v) = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = m\frac{dv}{dx}v \quad \Rightarrow \quad \int dx = \int \frac{mv}{f(v)}dv$$

在前面的例題中曾述說，運動中物體與外界接觸所引起的摩擦力幾乎可以一常數來看待，而當時我們則完全不計空氣對運動物體的影響。實際上，物體於流體（如氣體或液體）內運動時，需排開行進方向前之流體方能前進，通常稱之為阻力。阻力的大小除了跟流體的特性有關之外，也與行進時所需於單位時間內排開之流體量有關，故阻力 R **會與物體之運動速度和垂直於行進方向的截面積** A **有關。**

例題八：終端速(terminal velocity) I **（低速行進） 一質量** 2.00g **的圓球體於油中自由掉落，經夠長時間後，該物體以等速** 5.00cm/s **的速度下降。求該物體自靜止到速度達到終端速的** 90%**大小時所需之時間。**

物體低速行進時，其阻力正比於速度的一次方，故此圓球阻力的大小可寫為 $R=bv$。**達終端速時，阻力的大小剛好等於重力（此題暫時假設浮力可忽略）**

$$\Rightarrow \quad bv_t = mg \quad \therefore b = \frac{mg}{v_t} = \frac{(2.00g)(980cm/s^2)}{5.00cm/s} = 392g/s$$

$$\therefore t = \int \frac{m}{mg - bv}dv = \int_{0cm/s}^{4.5cm/s} \frac{1}{(1 - v/v_t)g}dv = \frac{-v_t}{g}\ln(1 - v/v_t)\Big|_0^{4.5} = 11.7ms$$

由上列式子得知速度與時間的關係為 $v = v_t(1 - e^{-t/\tau});\ \tau \equiv m/b$

例題九：終端速(terminal velocity)II **（高速行進） 空氣阻力約可寫為**

$R=\frac{1}{2}D\rho Av^{2}$，**其中** D **為經驗值，而ρ為空氣的密度。故物體於大氣層內自由掉落的終端速為**

$$\sum F=0=mg-R \quad \Rightarrow \quad v_{t}=\sqrt{\frac{2mg}{DA\rho}}$$