三、守恆律

3.1 運動常量

若已知外力形式非為常數或時間之函數，亦非速度的函數，而是位置的函數，則物體的運動狀態仍可由牛頓運動定律得到：

$$m\ddot{r} = F(r)$$

由於上式難以直接分離，故兩邊各乘以位移的一次微分得

$$\dot{r}\, m\frac{d(\dot{r})}{dt} = \frac{d(m\dot{r}^2/2)}{dt} = F(r)\frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad d\left(\frac{m\dot{r}^2}{2}\right) = F(r)dr \quad \Rightarrow \frac{m\dot{r}^2}{2} = \int F(r)dr$$

上列式子中，若我們定義 $F(r)dr \equiv dW$，則由牛頓第二運動定律可得到

$$d\left(\frac{m\dot{r}^2}{2} - W\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{r_1}^{r_2} d\left(\frac{m\dot{r}^2}{2} - W\right) = 0$$

$$\therefore \frac{m\dot{r}^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \equiv K \quad \Rightarrow \qquad K - W = cons\tan t$$

這結果顯示，由牛頓的運動方程的首次積分預測，物體運動時存在著某一”運動常量”(*K*-*W*)。雖然這”運動常量”難以賦予一直觀可領悟的解釋，但我們卻可由對其特性掌握的角度來體會此不變量的意義。

運動常量 —守恆定律

”運動常量”的存在，代表此物理量於此動力系統中是”守恆”的。在上列牛頓運動定律的演變式子中，我們定義了兩個新的物理量

$$K \equiv \frac{mv^2}{2} \quad ; \qquad W \equiv \int F(r)\cdot dr$$

無論是 K 或 W，其個別的值於此動力系統中是會改變的。只有當此二物理量以(T-W)的形式存在時，方成為一運動守恆量。這基本上至少告訴我們三件事

（一）動力系統中存在有運動常量。

（二）若 K 與 W 為上述所定義的形式，則(K-W)於牛頓所描述的運動世界中是守恆的。

（三）K 與 W 所定義的形式雖不同，但所描述的卻為同一種物理量。亦即此物理量不僅可以 K 或 W 的形式來表示，且彼此之間可以互相轉換的。

人們於是賦予這些物理量一新的名詞 —“能量”(energy)。習慣上我們稱 T 為”動能”(kinetic energy)，W 為”功”(work)，而動能與功皆為能量的一種。

在此要強調的一點是，運動常量是數學計算的結果，因此所能得到的不變量將不僅止一個。相對的，在這些許許多多不同的守恆量中，並非每一個都是我們有興趣的。因此，於此章節中將只討論廣為接受與運用的幾個物理量。

3.2　功與功率

由上述的定義，功為力與位移的乘積。

$dW \equiv \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$　為一純量(scalar)　[單位]=[Nm]=[joule(J)]焦爾

=[kg(m/s^2)m]=[kg(m/s)^2]

式子中，「‧」代表向量內積(inner product, dot product)，其結果為純量。以 **A**,**B** 兩向量為例，其內積的結果為該二向量的大小，乘以其間夾角的餘弦函數值。

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta$$

向量內積滿足

交換律　$A \bullet B = B \bullet A$

結合律　$A \bullet (B+C) = A \bullet B + A \bullet C$

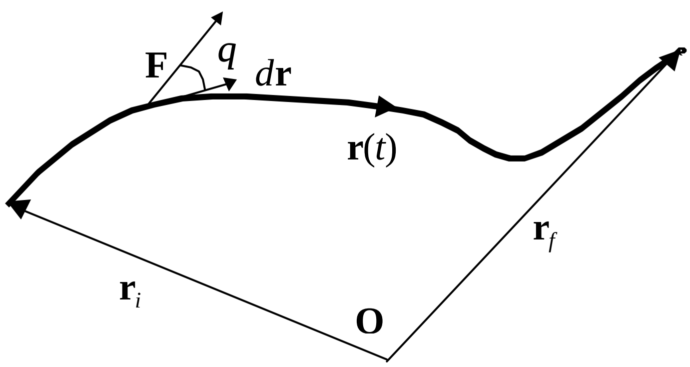
若向量以直角座標系統來表示時，向量內積可寫為

$$\mathbf{A} = A_x\,\boldsymbol{i} + A_y\,\boldsymbol{j} + A_z\,\boldsymbol{k} \quad ; \mathbf{B} = B_x\,\boldsymbol{i} + B_y\,\boldsymbol{j} + B_z\,\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

所以　$dW \equiv \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = F dr \cos\theta = F_{//} dr$

$F_{//}$為 **F** 在路徑方向（即速度方向）的分量



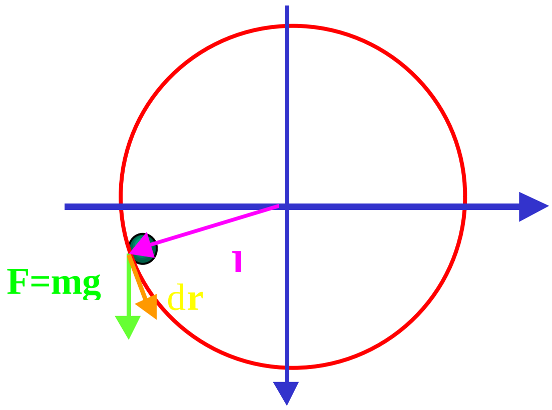
$$W = \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$ (沿運動路徑積分)

例題一：一鋼珠沿一平滑凹球面畫下（如圖所示），球重力對它所作的功。

F = mg $\boldsymbol{k}$

r = rcosθ $\boldsymbol{i}$ + rsinθ $\boldsymbol{k}$;

d **r** =- rsinθ dθ $\boldsymbol{i}$ + rcosθ dθ $\boldsymbol{k}$



$$\therefore \quad W = \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{q_1}^{q_2} r\cos \boldsymbol{q} \cdot mg \cdot d\boldsymbol{q}$$

想像兩除了裝配不同引擎外，為一模一樣的車子。此二車子自一樣的起點，沿著一樣的山坡道路徑，花費不同的時間，到達同樣的山坡頂終點。若只從作功的角度來看，此二車子對抗重力所作的功是一樣的，但是人們除此之外，對需花多少時間去做完這些功（到達山頂）存有相當大的興趣。這之間的差別在於所作功對時間變化率的大小。根據此觀念，人們定義工對時間的變化量為”功率”(power)。**平均功率的定義為**

$$\overline{P} \equiv \frac{W}{\Delta t} = \frac{\int F \cdot dr}{\Delta t}$$

而瞬間功率(instantaneous power)**則為**

$$P \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = F \cdot \frac{ds}{dt} = F \cdot v$$

例題二：一小型車的重量為 800kg，**而它的引擎效率只有** 18%（**亦即燃燒汽油後所得到的能量僅有** 18%**能傳輸出去**）。**利用已知數據，燃燒一加侖汽油能得到** 1.3×10^8 Joule，**問該汽車由靜止加速到** 27 m/s (60 mi/h)**需耗費多少汽油？**

假設所需耗費汽油 x **加侖，則**

$$x \times 1.3 \times 10^8 \, j \times 18\% = W = \int_0^v d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{mv^2}{2} = \frac{(800kg)(27m/s)^2}{2}$$

計算可得 x = 0.013 gal。

若此汽車以速度 60 mi/h **行進時所測得的耗油量為** 35 mi/gal。**問此時引擎的輸出功率為何？**

由於汽車受力的情況不明，故我們可先計算每小時耗油量，再轉換成功率。

每小時耗油量 (60 mi/h)/(35mi/gal)=12/7 gal/h

功率 $1.3 \times 10^8 \, j/gal \times 18\% \times 12/7 gal/h = 62kW$

3.3 功-動能定理(Work-Kinetic Energy Theorem)

根據第一節的描述，(K-W)**為一運動守恆量。故**

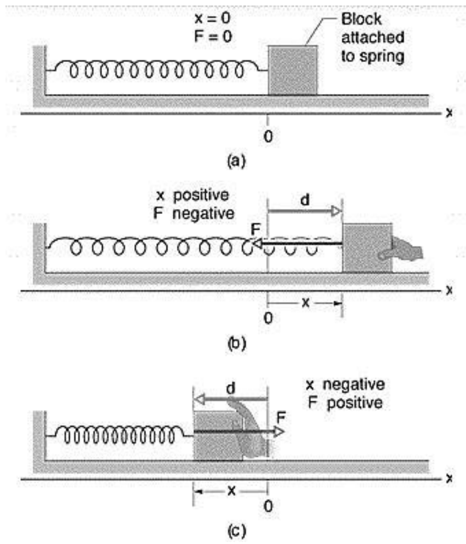
$$W=\int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f}F_{//}\cdot dr=\int_{v_i}^{v_f}mvdv=m\cdot\frac{1}{2}v^2\Big|_{v_i}^{v_f}=\frac{1}{2}mv_f{}^2-\frac{1}{2}mv_i{}^2$$
$$=K_f-K_i=\Delta K$$

這關係稱為功-動能定理(Work-Kinetic Energy Theorem)

例題三：Spring-Mass System (**彈簧重物系統**)

當彈簧受外物影響而產生形變時，彈簧會對此外物產生一與形變量成正比且方向相反的阻力

$F=-kx$



考慮初態 $x_i=-D,\quad v_i=0$

末態 1 $x_{f1}=0,\quad v_{f1}=?$

末態 2 $x_{f2}=?,\quad v_{f2}=0$

<u>**末態** 1</u>**：由功-動能定理**

$$W_1=\int_{x=-D}^{x=0}Fdx=\int_{-D}^{0}-kxdx=-\frac{1}{2}kx^2\Big|_{-D}^{0}=\frac{1}{2}kD^2=K_{f1}-K_i=\frac{1}{2}mv_{f1}^2$$

$$v_{f1}=\pm\sqrt{\frac{k}{m}}D$$

或由微分方程式 $\ddot{x}=-\frac{k}{m}x$ **的解** $x(t)=-D\cos wt$**，其中** $w=\sqrt{\frac{k}{m}}$，

$v(t)=Dw\sin wt$

要求 $x=0$**，可得** $wt=\frac{p}{2}+np$ ， n **為整數**

此時 $v=\pm Dw$

<u>**末態** 2</u>：

$$W_2=\int_0^{x_{f2}}-kxdx=-\frac{1}{2}kx_{f2}^2=K_{f2}-K_{f1}=-\frac{1}{2}mv_{f1}^2=-\frac{1}{2}kD^2$$

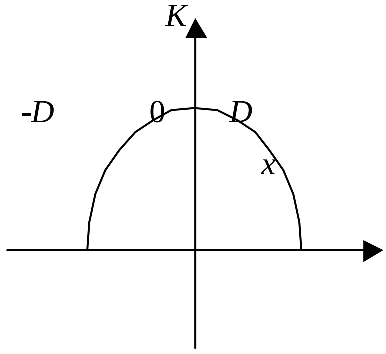
$$x_{f2}=\pm D$$

或由微分方程式的解可得

要求 $v(t)=0$**，** $wt=np$**，此時之** $x=\pm D$

another thought!

我們將動能對位置的關係圖畫出可得：



K 反覆出現又消失，但在同一位置 K 均相同。

假如起始時 x=0, v=0，系統保持靜止。如上頁圖(a)**。**
然後*慢慢地*施力 F_{ext} 壓縮彈簧至 x=-D
多慢呢？要求 v~0 且維持不變，即 a=0。
（這步驟要用無限久的時間完成）

$F_{spring}+F_{ext}=0 \rightarrow F_{ext}=-F_{spring}=kx$

計算 F_{ext} 所做的功：

$$W_{ext} = \int_0^{-D} F_{ext} dx = \int_0^{-D} kx dx = \frac{1}{2}kx^2 \Big|_0^D = \frac{1}{2}kD^2$$

位移 D 愈大，外力所做的功 W_{ext} 愈大。
物體到達-D 後，外力除去，當物體回到 x=0 時，K=W_{ext}。

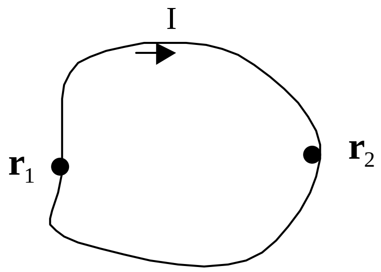
我們將物體放在不同的*<u>位置</u>*，好像可以將功或是動能*<u>儲存</u>*起來。

我們可以定義位能 (Potential Energy) U (**也有人叫勢能**)
- **和位置 r 有關的純量 U(r)**
- **做功的可能性**
- **轉換成動能的趨勢**

3.4 位能與保守力(Potential Energy and Conservative Force)

在討論力僅依賴於位置的情況時，若其函數形式為可積分的，這相當於求和過程中與所經路徑無關（與其歷史無關），僅與其初始與最終位置有關，則我們稱具有此性質的力為”保守力” (conservative force)**。根據此定義，用數學式表示：**

$$\underset{pathI}{\int_{r_1}^{r_2} F(r)\cdot dr} = \underset{pathII}{\int_{r_1}^{r_2} F(r)\cdot dr}$$



$$\int_{r_1}^{r_2} F(r)\cdot dr + \int_{r_2}^{r_1} F(r)\cdot dr = \oint F(r)\cdot dr = 0$$

pathI *pathII*

II

$\longrightarrow$

由於保守力所作之功僅與初始和最終位置有關，因而可以引進僅依賴於位置 r 的純量函數 U(r)（記得功為一純量），稱之為位能(potential)。

位能的數學定義：

$$U(\mathbf{r}_f) - U(\mathbf{r}_i) = W_{ext} = \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \mathbf{F}_{ext}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} -\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

或 $dU = -\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$

一物體在空間中受到一力 **F**(通常為位置的函數)的影響，我們以外力 $\mathbf{F}_{ext}$ 對抗 **F** 將物體以準靜態(quasi-static process)過程(即 **v**~0 且維持不變，**a**=0)由 $\mathbf{r}_i$ 移到 $\mathbf{r}_f$，過程中外力所做的功 W_{ext} 定義為 $\mathbf{r}_f$ 與 $\mathbf{r}_i$ 間之位能差(potential energy difference)。注意！這裡只定義了位能差，要獲得絕對位能值前必須先定義位能的零點。位能的零點通常是根據解決問體的方便性來定義。

例題四：彈性位能 Spring-Mass System *continue* (**彈簧重物系統續**)

$$W_S = \int_{x_i}^{x_f} F_S dx' = -\int_{x_i}^{x_f} kx'dx' = \frac{1}{2}kx_i^{\ 2} - \frac{1}{2}kx_f^{\ 2} = U_S(x_i) - U_S(x_f)$$

選擇 $U_S(0)=0$，則彈性位能 $U_S(x) = \frac{1}{2}kx^2$

（由 $x\to 0$ 所釋放出來的動能）

無外力影響下，考慮物體由 x_1 移至 x_2($\leqq D$ 最大位移)，K_1 已知，K_2=?

由功-動能定理

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} F dx = -(\int_{x_1}^{x_2} -F dx) = -[U(x_2) - U(x_1)] = -\Delta U$$

即$\Delta K + \Delta U = 0$，或$\Delta(K+U)=0$，或 $K+U$=常數

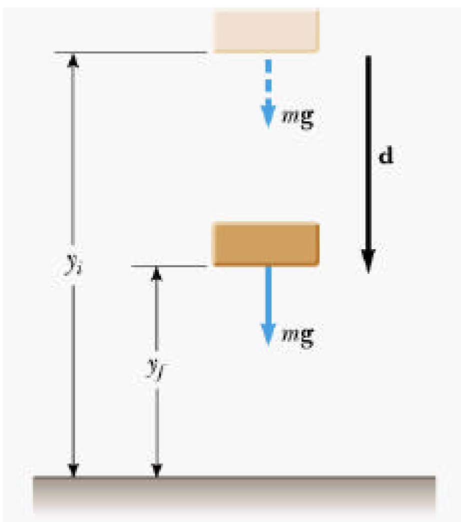
動能和位能之和我們稱之為力學能(Mechanical Energy)。由上面說明可發現，若一力能定義位能，那麼，在僅有此力作用的情形下，力學能守恆。

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = K_1 + U_1 - U_2$$

例題五：重力位能(Gravitational Potential Energy)

$$\mathbf{F}_g = -mg\mathbf{j}$$



$$W_g = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} -\mathbf{F}_g \cdot d\mathbf{r} = \int_{y_i}^{y_f} mgdy = mg(y_f - y_i)$$

$$= U_g(y_f) - U_g(y_i)$$

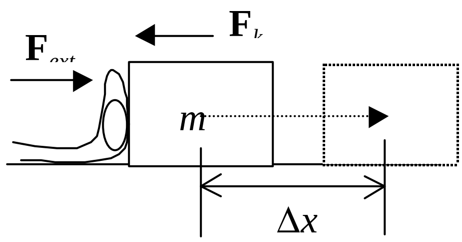
令 $U_g(0)=0$**，則重力位能可寫為** $U_g(y)=mgy$

3.5 非保守力(non-conservative force)

自然界中並非所有的力皆為保守力，有些作用力如摩擦力等所作的功，不由起始與最終位置唯一決定，而是與其所經路徑有關（與其歷史有關），通稱此類型的力為非保守力。

摩擦力和保守力有何不同呢？

考慮以 $\mathbf{F}_{ext}$ **對抗摩擦力** $\mathbf{F}_k$**，推物體緩慢移動**Δx**，**$\mathbf{F}_{ext}$**做功** $\mathbf{F}_{ext}\cdot\Delta x$**。**$\mathbf{F}_{ext}$**移去後，所做之功無法以動能之形式再出現。(這些能量到哪裡去了呢？)**

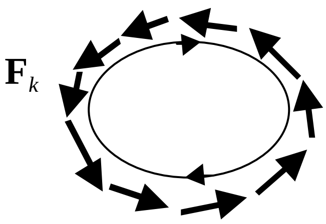


$U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1) = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ **和路徑無關，只和起點及終點有關。**

若是非保守力， $\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ **和路徑有關，無法定義只和位置有關的位能** $U(\mathbf{r})$。

非保守力的例子

(1) **摩擦力**

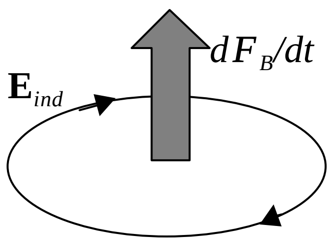


$$\oint \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r} \neq 0$$

(2) **感應電場**

$$\oint \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \oint q\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} \neq 0$$



3.6 力場(Field)與位能

保守力於空間形成一力的大小、方向（向量）與位置關係的分布，我們稱

之為保守力場(Conservative Force Field)（向量場)。在此所謂的"場"，為描述物理量於空間的分布，亦即將物理量考慮成是空間的特性，而非是附屬不同討論系統中物質的特性。場可為

向量場---例如力場、速度場

純量場---例如溫度的分布，位能場等

■ 力場中可以感應到力的物質特性和力的種類有關：

重力場---- 質量

靜電場------ 電荷

■ 力場的強度 $\mathcal{F}$

$$\mathbf{F}=\mathcal{F}\times\begin{pmatrix} \text{質量} \\ \text{電荷} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$\mathcal{F}$ 為向量，單位=[力/感應到力的物質特性]

例如： (a)重力場強度

$\mathbf{F}=\mathcal{G}\cdot m$ $\mathcal{G}$ 的單位恰為加速度的單位

(b)電場強度

$\mathbf{F}=\mathcal{E}\cdot q$

■ 保守力場 $\mathbf{F}(\mathbf{r})\rightarrow$位能 $U(\mathbf{r})$ 積分

$$U(\mathbf{r})-U(\mathbf{r}_0)=-\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

$$=-\int_{x_0}^{x}F_x dx-\int_{y_0}^{y}F_y dy-\int_{z_0}^{z}F_z dz$$

■ 位能 $U(\mathbf{r})\rightarrow$保守力場 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 微分

$$-dU(\mathbf{r})=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz\right)=\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=-\nabla U(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$$

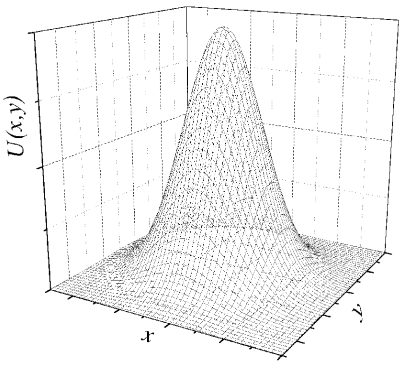
式子中 ∂ 讀做 partial, $\dfrac{\partial}{\partial x}$ 表示 y, z 保持固定，只對 x 取微分，此步驟稱為取偏微分(partial derivative)。一個純量($U(\mathbf{r})$)的方向導數為一向量($\nabla U(\mathbf{r})$)，通常稱之為梯度(Gradient)。梯度描述物理量在空間變化的情形，數學上習慣以∇或 grad 來表示

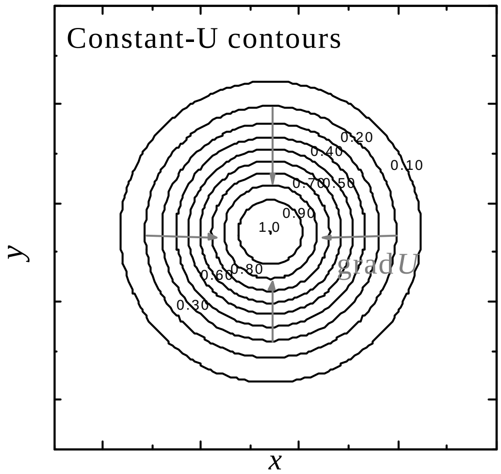
$$grad=\nabla\equiv\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$\therefore\mathbf{F}(\mathbf{r})=-\nabla U(\mathbf{r})=-\left(\mathbf{i}\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\right)=-\mathbf{grad}\,U(\mathbf{r})$$

所以力可視為位能的方向導數 $\mathbf{F}(\mathbf{r})=-\nabla U(\mathbf{r})$。這代表保守力場（向量場）可表

示為位能場之負梯度，換句話說，若已知位能函數 $U(\mathbf{r})$，則可由上式求出相對應的保守力場 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$。由於一般上處理純量較處理向量簡單許多，故在解力學問題時，位能場可代替保守力場。在圖解位能場（純量場）時，習慣上以等位能面（滿足 $U(\mathbf{r})$=常數所形成的曲面）來表示，如下圖所示





左圖為一二維位能的立體圖，右圖為其投影在 xy 平面上的等位能圖形。右圖中每一條曲線代表不同的 $U(x,y)$值，而同一條曲線中的每一點之 $U(x,y)$值皆相等。假設一位移 d**r** 沿著某一等位面（等位線）內，則其位能差為 0（據定義，因等位面上 dU=0），所以我們有

$$\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = -\nabla U(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = -dU(\mathbf{r}) = 0$$

由於位移向量 d**r** 沿著等位面，而上式結果告訴我們向量 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$與$\nabla U(\mathbf{r})$和位移向量 d**r** 的內積為零，故場力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$與位能場梯度$\nabla U(\mathbf{r})$永遠垂直於等位面。利用此同一結果，我們亦可得知，當位移向量 d**r** 與位能場梯度$\nabla U(\mathbf{r})$平行時，dU 的變化值最大。因此，$\nabla U(\mathbf{r})$為沿著位能場增加最快的方向，而 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 為沿著位能場下降最快的方向。

例題六：某已知位能場可表為$U(r) = -\dfrac{G}{r} = U(x,y,z) = \dfrac{-G}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}$其場梯度$\nabla U(\mathbf{r})$與相對應保守場力為

$$\therefore \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = -\left(\mathbf{i}\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\right)$$

$$= G\left(\frac{-x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{-y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\mathbf{j} + \frac{-z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\mathbf{k}\right) = -\frac{G}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

所以當位能場為球形對稱且與半徑距離成反比時，相對應的保守力場永遠平行於指向球形中心的方向，且大小與半徑距離的平方成反比。

3.7 力學能守恆(Conservation of Mechanical Energy)

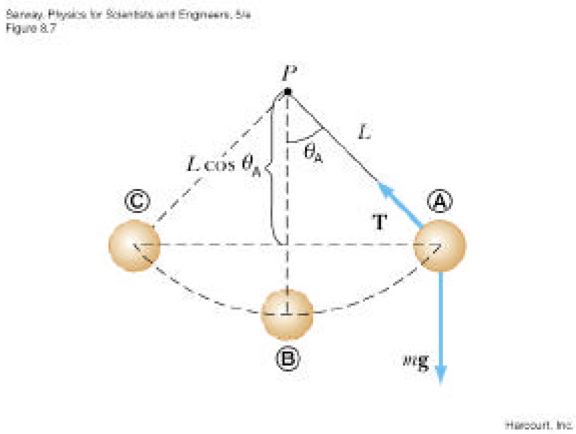
一個系統中若只有保守力做功(此部分的功可用位能的變化表示)，此系統稱為保守系統(conservative system)。**由功-動能定理可得：**

$$\Delta K = K_f - K_i = W = \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -[U(\mathbf{r}_f) - U(\mathbf{r}_i)] = -\Delta U$$

$$\Leftrightarrow \Delta K + \Delta U = 0 \Leftrightarrow \Delta(K+U) = 0 \Leftrightarrow \Delta E = 0$$

$E \equiv K+U$ **定義為總力學能**(total mechanical energy)，$\Delta E=0$ **表示整個過程力學能** E **保持不變，也就是力學能守恆**(conservation of mechanical energy)。

例題七：單擺(Pendulum)



以單擺支點為原點，令重力的方向為 y，**則擺動的最高與最低點為**

$y_H = -L\cos\theta_A$ **與** $y_L = -L$

由力學能守恆

$$E = K_A + U_A = K_B + U_B$$

$$\therefore 0 - mgL\cos\theta_A = \frac{1}{2}mv_B^2 - mgL$$

$$v_B = \sqrt{2gL(1-\cos\theta_A)}$$

在最低點時的繩子張力為

$$\sum F = T_B - mg = ma_r = m\frac{v_B^2}{L} \quad \Rightarrow \quad T_B = mg + 2mg(1-\cos\theta_A)$$

一個系統中若也有非保守力做功，則修正功-動能定理可得：

$$\Delta K = W_{non} + W_{con} = \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + -[U(\mathbf{r}_f) - U(\mathbf{r}_i)] = W_{non} - \Delta U$$

$$\Leftrightarrow \Delta K + \Delta U = W_{non} \Leftrightarrow \Delta E = W_{non}$$

例題八：一滑雪者自一無摩擦力的滑雪坡道下滑二十公尺高度之後，遇到一動摩擦係數為 0.21 **的水平雪地，問該滑雪者於水平雪地滑行多遠後會停止。**

下滑前之力學能為 $mgh+0$

停止時之力學能為 $0+0$

非保守力所作之功 $mgd\mu_k$

$$\therefore \Delta(K+U) = W_{non} \Rightarrow d = \frac{mgh}{mg\mu_k} = \frac{20}{0.21} = 95.2(m)$$

例題九：彈簧重物系統*再續*　一質量為 0.8kg **的物體，滑行於動摩擦係數為** 0.5 **的平面上，衝向一彈性係數為** 50 N/m **的彈簧。若該物體剛好碰觸到彈簧時的速度為** 1.2 m/s，**問此彈簧的最大壓縮距離為何？**

由能量守恆得

$$\Delta K = W_{non} - \Delta U \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgm_k x + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{1}{2}0.8kg \cdot (1.2m/s)^2 = 0.8kg \cdot 9.8m/s^2 \cdot 0.5x = \frac{1}{2}50N/mx^2 \Rightarrow x = 0.092$$

3.8 其他力學能守恆應用例子

由保守力場與其相對應的位能場之關係

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = -\left(\mathbf{i}\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\right)$$

當保守力為零時，位能場於空間中的變化率也為零。這相當於位能為極大或極小時，保守力為零。故當物體位於位能為極大或極小的地方，該物體的受力將為零。由牛頓定律可知，若物體處於位能極值的位置時為靜止的，則該物體將保持其靜止的狀態，我們稱之處於平衡(equilibrium)**態。位能為極大值時，自任何方向離開該位置皆是降低位能的方向，亦即是順著作用力的方向。所以只要有任何方向上一點點微小位置的擾動，該物體將會被推離原來位置，我們稱此為不穩定平衡。而當位能為極小值時，自任何方向離開該位置皆是增加位能的方向，亦即是相反於作用力的方向。所以只要有任何方向上一點點微小位置的擾動，該物體將會被推回原來位置，我們稱此為穩定平衡。**

例題十：分子中兩中性原子之間的作用力所形成的位能場通常可表為

$$U(x) = 4\boldsymbol{e}\left[\left(\frac{\boldsymbol{s}}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\boldsymbol{s}}{x}\right)^{6}\right]$$

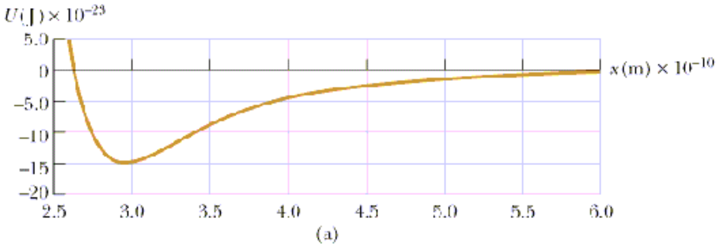
此為所熟知的 Lennard-Jones **位能函數，而式子中** x **代表兩原子間的距離。若一已知的系統有** $\boldsymbol{s} = 0.263nm; \boldsymbol{e} = 1.51 \times 10^{-22} j$**，則最可能的原子間距離為：**

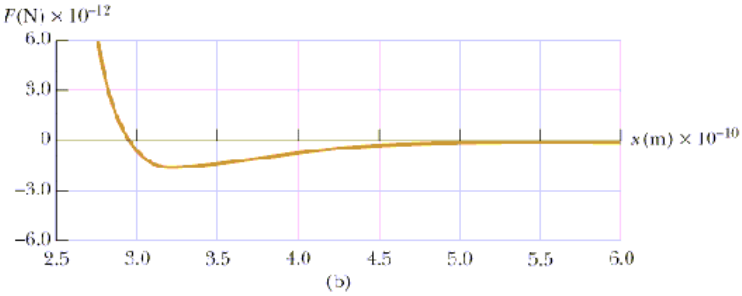
我們欲求的為其位能之穩定平衡點，所以二原子間作用力約為零時

$$F = 0 = \frac{dU(x)}{dx} = 4\boldsymbol{e}\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{\boldsymbol{s}}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\boldsymbol{s}}{x}\right)^{6}\right] = 4\boldsymbol{e}\left[\frac{-12\boldsymbol{s}^{12}}{x^{13}} - \frac{-6\boldsymbol{s}^{6}}{x^{7}}\right] \Rightarrow x = 0.295nm$$

其力與位置的關係為

$$F(x) = -4\boldsymbol{e}\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{\boldsymbol{s}}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\boldsymbol{s}}{x}\right)^{6}\right] = 4\boldsymbol{e}\left[\frac{12\boldsymbol{s}^{12}}{x^{13}} - \frac{6\boldsymbol{s}^{6}}{x^{7}}\right]$$





能量守恆律(Conservation of Energy)

這裡我們將功-動能定理改寫一下：

令 $W_{non}=-\Delta E_{int}$**，可得**$\Delta(K+U+E_{int})=0$。**令總能量** $E_{tot}=K+U+E_{int}$**，我們得到一個用途更廣的能量守恆定理**(the law of conservation of energy)。**或者，**

$\Delta E_{tot}=\Delta K+\Delta U+\Delta E_{int}$+[changes in other forms of energy]=0**,**

或者：

In an isolated system, energy can be transferred from one type to another, but the total energy of the system remains constant.

這不是一個推導出來的定理，而是實驗觀察沒發現例外，而我們相信的定律。敘述中，獨立系統(isolated system)**係指和外界任何形式之能量交換的系統。由系統外以任何形式**(**做功、熱、或輻射等**)**輸入的能量等於系統總能之變化。**

質量與能量

除了由運動常量之外，我們未曾提到另一個常用到的守恆律，那就是質量守恆。在化學與古典物理範疇中，我們常接受不論是經由任何物理或化學過程，質量不會被產生或毀滅。然而此觀念被愛因斯坦於 1905 **年所提出來的新理論推翻。愛因斯坦認為質量與能量為同一物理量的不同表徵，而它們之間的關係為**

$$E_R=mc^2$$

例題十一：太陽每秒轉換約$4.19\times10^9\,kg$**的物質成為能量，這相當輸出功率為？**

$$\Delta E=\Delta mc^2=4.19\times10^9\,kg\times(3.00\times10^8\,m/s)^2=3.77\times10^{26}\,J$$

$$Power=\frac{3.77\times10^{26}\,J}{1.00s}=3.77\times10^{26}W$$