四、碰撞

4.1　衝量與動量(*Impulse and Momentum*)

雖然一般所熟知的牛頓第二運動定律的數學形式表達為

$$F = m\frac{dv}{dt} = m\dot{v} = ma$$

但是在考慮較複雜的動力學問題時，另一種表達形式卻比較容易應用。牛頓在考慮物體的"運動量"變化時，定義描述物體運動狀態量 $\mathbf{P}$ 的大小等於其質量 m 乘以其運動速度 $\mathbf{v}$，稱之為"線性動量"(linear momentum)。利用此定義，牛頓第二定律明確的敘述物體運動狀態量 $\mathbf{P} = m\mathbf{v}$ 與作用力的關連為

"*The time-rate-of-change of a quantity called momentum is proportional to the force*"。

數學上可寫為：

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{P}}{dt}(= m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\ \textit{when m is a constant})$$

衝量-動量定理(*impulse-linear momentum theorem*)

由上式牛頓運動定律的形式，我們可重新寫成

$$\mathbf{F}\cdot dt = d\mathbf{P}$$

若我們將等號左邊的式子定義成一新的物理量

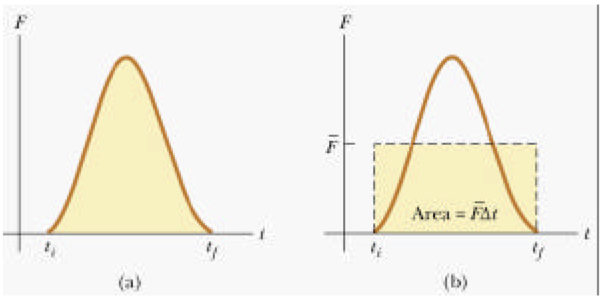
$$d\mathbf{I} \equiv \mathbf{F}\cdot dt \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I} = \int \mathbf{F}\cdot dt$$

我們賦予此新物理量的名稱為衝量(Impulse)。衝量為一向量，其大小等於力與作用時間的乘積，故其單位=[N・s]=[kg・m^2・s^{-2}・s]=[kg・m/s]。則牛頓第二運動定律告訴我們：力 F 作用於物體的衝量等於該物體因此力而引起的動量變化。

$$\mathbf{I} = \int \mathbf{F}\cdot dt = \Delta\mathbf{P}$$

例題一：一重 140g 的棒球以 39m/s 的速度飛向打擊者，打擊者揮棒擊中，該球以 39m/s 的速度朝反方向飛出。則此棒球所受的衝量為

$$I = \Delta P = P_f - P_i = mv_f - mv_i$$
$$= (0.14kg)(39m/s) - (0.14kg)(-39m/s)$$
$$= 10.9kg\cdot m.s$$



棒球與球棒衝擊時的受力狀況約為如右圖所示，若其撞擊時間約 1.3ms，則其平均受力

$$\overline{F}=\frac{I}{\Delta t}=\frac{10.9kg\cdot m/s}{0.00012s}=9100N$$

在撞擊時，棒球所受的平均加速度為

$\overline{a}=\frac{\overline{F}}{m}=\frac{9100N}{0.14kg}=6.5\times10^{4}\approx 6600g$(**重力加速度**)

思考問題：汽車的保險桿應如何設計？若有兩款不同的設計，一為十分堅固的鋼鐵設計造型，另一為多槽式的塑膠設計。其可能的優缺點為何？同樣的，汽車安全帶與安全氣囊的設計的優缺點為何？

4.2 動量守恆(*momentum conservation*)與碰撞(*collision*)

當物體不受任何外力作用或所首例之總和為零時，由上述的牛頓第二定律可得 dP **為零。換言之，物體的動量為一運動常量—守恆量。考慮兩物體** 1 **與** 2，**此二物體之間可以有交互作用，但此二物體所形成的系統為一獨立系統，不受周遭環境的任何作用。當個別考慮此二物體的運動狀態時，我們有**

$$\mathbf{F}_{21}=\frac{d\mathbf{p}_1}{dt}\qquad and\qquad \mathbf{F}_{12}=\frac{d\mathbf{p}_2}{dt}$$

然而牛頓第三定律告訴我們：兩物體之間力的作用，為彼此相互存在的，且其大小相等方向相反。此條件可寫為

$$\mathbf{F}_{12}+\mathbf{F}_{21}=0\quad\Rightarrow\quad\frac{d\mathbf{p}_1}{dt}+\frac{d\mathbf{p}_2}{dt}=0=\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)$$

此二物體線性動量相加為一守恆量。這結果推廣至多物體系統時，該系統的總動量為各個物體動量之和，而當此系統為獨立系統時，由牛頓運動定律可得

$$\mathbf{p}_{tot}=\sum_{system}\mathbf{p}=\text{常數}$$

此結果即為一般所熟知的線性動量守恆(law of conservation of linear momentum)。**雖然這守恆量為牛頓運動定律所導出來的結果，但是其結論的運用卻遠較牛頓力學適用的範圍廣。**

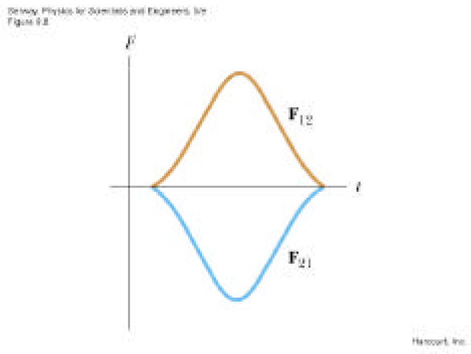
例題二：一七十公斤重的太空人漂浮於一無重力狀態的太空實驗室中，為使自己能夠移動至駕駛艙，他將一重為一公斤的夾克以 20m/s **的速度拋向相反的方向，問此太空人可預期得到多大的運動速度？**

由於太空人與夾克可視為一獨立系統，故有 $p_{1i}+p_{2i}=p_{1f}+p_{2f}$

$$\therefore\quad m_1v_{if}+m_2v_{2f}=0\quad\Rightarrow\quad v_{1f}=-\frac{m_2}{m_1}v_{2f}=-\frac{1kg}{70kg}20m/s=-0.3m/s$$

考慮二物體產生碰撞，在之間距離夠接近時，此二物體會感受到來自對方十分明顯的排斥力。想要直接瞭解或探討碰撞時物體間的實際作用狀況幾乎為不可

能，然而不論此作用力為如何複雜，我們知道牛頓的第二與第三定律的描述皆成立。所以每個物體的動量變化等於作用力給予的衝量大小



$$\Delta\mathbf{p}_1 = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}_{21} \qquad \Delta\mathbf{p}_2 = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}_{12}$$

$$\because \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \qquad \therefore \Delta\mathbf{p}_1 + \Delta\mathbf{p}_2 = 0$$

所以不論是何種相互作用力情況的碰撞，只要沒有其他外力的介入，碰撞前後系統的總動量是守恆的。

4.3 彈性(*elastic*)與非彈性(*inelastic*)碰撞

粒子間的碰撞，基本上可簡單的分類為彈性碰撞與非彈性碰撞。若碰撞前後的總動能(kinetic energy)**保持不變，我們稱之彈性碰撞。相對的，若碰撞前後的總動能不一樣，我們則稱之非彈性碰撞。然而，不論是彈性碰撞或非彈性碰撞，碰撞前後系統的總動量總是會守恆的（對獨立系統而言）。**

完全非彈性碰撞(*Perfectly Inelastic Collisions*)

考慮非彈性碰撞時，通常需要額外有關於運動能量改變多少的訊息，方能預測碰撞後的結果。其中有一特殊的情況是可以不須知到運動能量改變的，那就是兩物體碰撞後以同一運動速度行進，我們稱此情況為完全非彈性碰撞。由於動量是守恆的，所以在此狀況下有

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f \qquad \Rightarrow \qquad v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

例題三：彈擺(*The Ballistic Pendulum*)　　**彈擺為測試快速飛行投射物（如子彈等）飛行速度的裝置。若一子彈射入並留置於一靜止懸掛的木塊，此木塊因而擺動升高距離** h。**問子彈的飛行速度為多少？**

令子彈的質量為 m，**飛行速度為** v，**而木塊的質量為** M

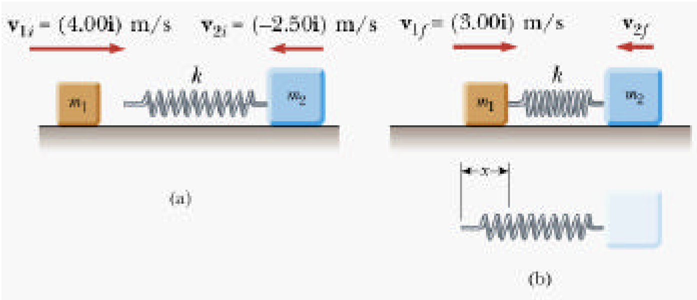
$$\Rightarrow p_i = mv + M \cdot 0 = p_f = (m+M) v_f$$

$$\therefore v_f = \frac{mv}{m+M}$$

木塊因而擺動升高距離 h **所得到的重力位能來自碰撞後所剩餘的動能，故**

$$U(h) = (m+M)gh = K_f = (m+M) v_f^2 / 2$$

$$\therefore v = \left(\frac{m+M}{m}\right)\sqrt{2gh}$$



例題四：質量為 1.6kg 與 2.1kg 的物體，分別以 4.00m/s 與 2.50m/s 的速度相向而行。若物體滑行時沒有摩擦力，而其中一物體如圖所示的裝有一彈性係數為 600 N/m 的彈簧。

（一）問當第一個物體的速度降為 3.00m/s 時，第二個物體的速度為何？（二）此時彈簧的壓縮量為何？

由動量守恆可得

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \Rightarrow (1.6kg)(4.0m/s) + (2.1kg)(-2.5m/s)$$
$$= (1.6kg)(3.0m/s) + (2.1kg) v_{2f}$$

$$\therefore v_{2f} = -1.74m/s$$

此時的動能差完全轉變為彈性內能，故

$$K_i - K_f = \frac{1}{2}kx^2 \quad \Rightarrow \quad x = 0.173m$$

一維彈性碰撞

由於彈性碰撞前後的動量與動能都不變，所以有

$$\mathbf{p}_i = m_1 \mathbf{v}_{1i} + m_2 \mathbf{v}_{2i} = \mathbf{p}_f = m_1 \mathbf{v}_{1f} + m_2 \mathbf{v}_{2f}$$

$$K_i = \frac{m_1 v_{1i}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2i}^2}{2} = K_f = \frac{m_1 v_{1f}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2f}^2}{2}$$

在考慮一維的碰撞情況下，上列動能守恆式可重組為

$$m_1\left(v_{1i}^2 - v_{1f}^2\right) = m_2\left(v_{2f}^2 - v_{2i}^2\right) \quad \Rightarrow \quad m_1\left(v_{1i} - v_{1f}\right)\left(v_{1i} + v_{1f}\right) = m_2\left(v_{2f} - v_{2i}\right)\left(v_{2i} + v_{2f}\right)$$

上列動量守恆式則可重組為

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})$$

將二式相除，則可得到

$$(v_{1i} + v_{1f}) = (v_{2f} + v_{2i})$$

在物體的初始速度為已知時，碰撞後二物體的末速則可利用上式結果代入守恆式

$$v_{2f} = (v_{1i} + v_{1f}) - v_{2i} \Rightarrow v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{2i}$$

$$v_{1f}=(v_{2i}+v_{2f})-v_{1i}\Rightarrow v_{2f}=\left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)v_{1i}+\left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)v_{2i}$$

有一點要在此強調的是，於運用上面的結果時，需將正確的正負號放入。假若以向右為正值，則向左的運動速度應為負值。

我們考慮幾個特殊的情況：若二物體質量一樣時，則$v_{1f}=v_{2i}$**且**$v_{2f}=v_{1i}$。**這情況等於當二者質量相等時，於碰撞後會相互交換速度。這情況正如撞球時，兩顆球正撞後，母球停於被撞子球處，而子球以原母球的速度繼續前進（定桿）的情況。**

若以物體二為被撞擊目標且處於靜止起始狀態$v_{2i}=0$，**當其質量遠大於撞擊物體時**$m_1<<m_2$，**於碰撞後**$v_{2f}\approx 0, v_{1f}\approx -v_{1i}$。**故以一乒乓球撞擊保齡球時，保齡球將保持原有的運動速度，而乒乓球則將以相同的相對速度朝反方向行進。**

若仍以物體二為被撞擊目標且處於靜止起始狀態$v_{2i}=0$，**當其質量遠小於撞擊物體時**$m_1>>m_2$，**於碰撞後**$v_{1f}\approx v_{1i}, v_{2f}\approx 2v_{1i}$。**故若以一保齡球撞擊乒乓球時，保齡球基本上將保持原有的運動速度，而乒乓球將兩倍的速度遠離保齡球。**

思考問題：為何乒乓球是以<u>兩倍的速度</u>遠離？

例題五：在核反應爐中，中子由U_{92}^{235}**經分裂反應而產生。剛分裂出來的中子速度為** 10^7 m/s，**若欲利用此中子去觸發下一個分裂反應，則至少需減速到** 10^3 m/s。**通常的反應爐設計會以重水**(D_2O)**或石墨作為減速媒介，而中子會因與重水或石墨產生彈性碰撞而降低速度。假設每次中子與減速媒介分子的彈性碰撞近乎正撞，且減速媒介分子碰撞前接近於處在靜止狀態。問每經一次碰撞後，中子損失多少百分比的動能？**

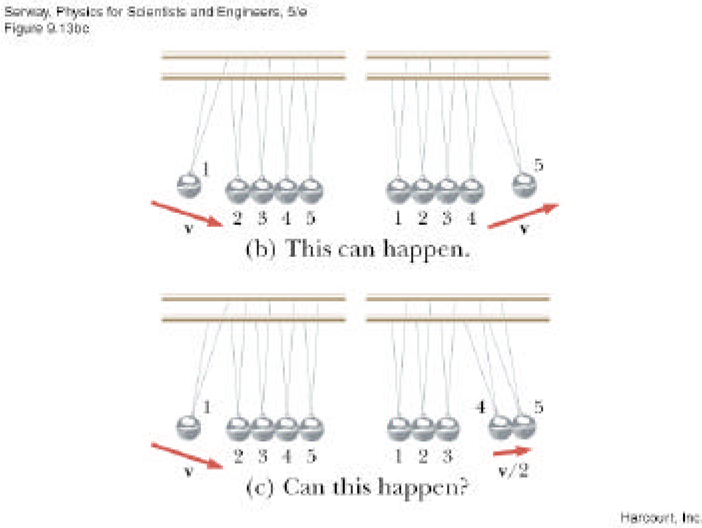
由於減速媒介分子的初速為零，故我們有

$$K_{ni}=\frac{m_n v_{ni}^2}{2} \quad ; \quad K_{nf}=\frac{m_n v_{nf}^2}{2}=\frac{m_n}{2}\left(\frac{m_n-m_m}{m_n+m_m}\right)^2 v_{ni}^2$$

$$\therefore f_n=\frac{K_{nf}}{K_{ni}}=\left(\frac{m_n-m_m}{m_n+m_m}\right)^2$$

以重水為例，中子與氘(deuterium)**的原子核碰撞，此時**$m_m=2m_n$，**所以每次碰撞後中子只剩** 1/9 **的動能，而** 89%**的動能皆因彈性碰撞而傳給了重水。**

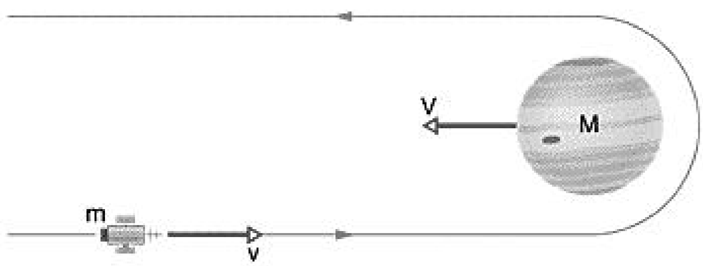
思考問題：下圖為一簡單的動量與動能守恆示範裝置。問



(b) This can happen.

(c) Can this happen?

例題六：太空船旅行者二號(Voyager II)以相對於太陽為 12km/s 的速度奔向木星，而木星的軌道運行速度相對於太陽為 13km/s 與太空船相向而行。當旅行者二號接近木星時，會受重力的影響而改變其運動速度 (如圖所示)。問當太空船旅行者二號遠離木星時，其運動速度為何？



在此我們可以認定木星的質量遠大於太空船的質量，故

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2i} \Rightarrow v_{1f} \cong -v_{1i} + 2v_{2i} = 12 + 2\times 13 = 38 km/s$$

此為利用重力來加速的例子。

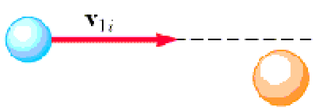
二維彈性碰撞

若所考慮的二體碰撞問題為一獨立系統，則動量守恆的條件於 *x,y,z* 三個不同的獨立方向上之分量皆同時成立。通常獨立的二體碰撞問題，在選擇適當的座標系統後，可以由三維簡化成二維的問題（為何？）。所以動量守恆可寫為

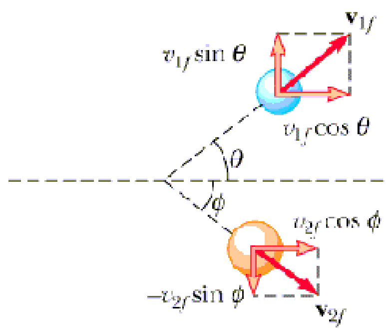
$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx}$$
$$m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy}$$

習慣上，我們也常常採用極座標來表示

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta + m_2 v_{2f} \cos\phi$$
$$0 = m_1 v_{1f} \sin\theta + m_2 v_{2f} \sin\phi$$

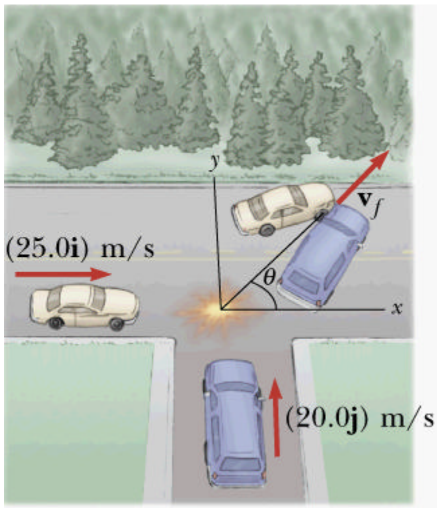


(a) Before the collision



(b) After the collision

例題七：一 1500kg 的轎車與一 2500kg 休旅車於三叉路口相撞（如右圖所示）。問撞擊後兩車殘骸的速度與方向為何？（假設撞擊為完全非彈性碰撞）



由 x 與 y 方向上動量守恆得

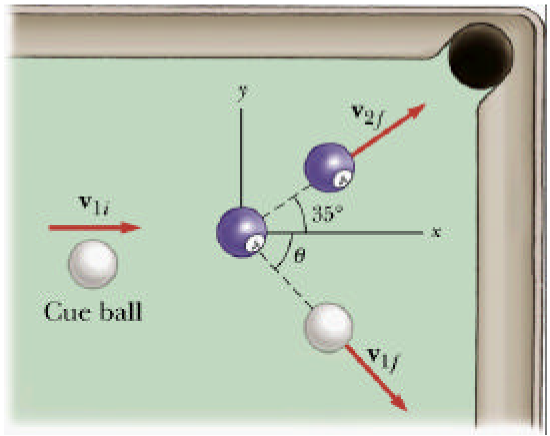
$$x \Rightarrow \sum p_{xi} = (1500kg)(25.0m/s) = \sum p_{xf} = (4000kg)v_f \cos\theta$$

$$y \Rightarrow \sum p_{yi} = (2500kg)(20.0m/s) = \sum p_{yf} = (4000kg)v_f \sin\theta$$

二式相除得

$$\tan\theta = 1.33 \Rightarrow \theta = 53.1^o \quad \Rightarrow \quad v_f = 15.6m/s$$

例題八：一撞球遊戲如右圖所示。若子球進袋時的角度為 35°，問母球會以何角度偏移？



由於子球的起始速度為零，且子球與母球的質量相等，故由動能守恆可得

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 = m_1 v_{1f}^2 + m_2 v_{2f}^2 \Rightarrow v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2$$

由動量守恆 $\mathbf{v}_{1i} = \mathbf{v}_{1f} - \mathbf{v}_{2f}$

將此向量結果帶入上式

$$v_{1i}^2 = (\mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f})(\mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f}) = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2\mathbf{v}_{1f}\cdot\mathbf{v}_{2f} = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2v_{1f}\cdot v_{2f}\cos(\theta + 35)$$

比較這結果與動能守恆式子，我們有

$$2v_{1f}v_{2f}\cos(\theta + 35) = 0 \Rightarrow \theta + 35^o = 90^o$$

4.4 質量中心(The Center of Mass)

當考慮力學系統時，我們常喜歡選擇某一特定的點為座標系參考點，俗稱此點為質心。不論此力學系統為一堆粒子的組合，或是一有限大小的物體，我們希望能找到一位移點代表描述此系統的運動狀態，且符合牛頓運動定律。滿足此條件的特定點，即為此系統的質量中心。以一堆粒子組合的力學系統為例，牛頓運動定律告訴我們 $F=ma$，對每一粒子而言皆滿足

$$\mathbf{F}_i = m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \frac{d^2(m_i\mathbf{r}_i)}{dt^2}$$

作用於此系統的力，等於作用於每一粒子上之力的總和

$$\therefore \mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i \frac{d^2(m_i\mathbf{r}_i)}{dt^2} = \frac{d^2\left(\sum_i m_i\mathbf{r}_i\right)}{dt^2}$$

由此可知，若我們定義$\mathbf{R} \equiv \dfrac{\sum_i m_i\mathbf{r}_i}{M}$其中$M = \sum_i m_i$ 為總質量，則上式可改寫為

$$\therefore \mathbf{F} = \frac{d^2\left(\sum_i m_i\mathbf{r}_i\right)}{dt^2} = \frac{d^2(M\mathbf{R})}{dt^2} = M\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$$

故在此 R 的定義滿足質心的條件，故此特定的質心點可由該定義求得。若此系統為一有限大小的物體時，R 的定義不變，只是由離散的相加變成連續相加-積分。也就是

$$\mathbf{R} \equiv \frac{\sum_i m_i\mathbf{r}_i}{M} \quad \Rightarrow \mathbf{R} \equiv \frac{\int \mathbf{r}_i\, dm}{M} = \frac{\int \mathbf{r}_i\, \rho dV}{M} = \frac{1}{V}\int \mathbf{r}_i\, dV$$

例題九：求底邊為 a，高為 b 的直角三角形之質心。

若此三角形為均勻密度，則其質心位置為$\mathbf{R} = \dfrac{1}{A}\int \mathbf{r}\, dA$

$\therefore x_{CM} = \dfrac{2}{ab}\int x \cdot y dx$　　由於在 x 位置的三角形高度為$y = \dfrac{b}{a}x$，所以

$$x_{CM} = \frac{2}{ab}\int_0^a x\frac{b}{a}x dx = \frac{2}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{2}{3}a$$

依類似的計算，我們可得$y_{CM} = \dfrac{1}{3}b$

例題十：某古文明遺跡如右圖所示，形狀類似一未完成的圓錐體。此遺跡頂端近似一半徑為 16m 的圓形平台，底面為半徑 88m 的圓形基底，總高為 40m。若已知其總體積為$4.09\times10^5 m^3$，圓錐體斜面與水平地面夾 30 度角，求其質心位置？

若沿水平面切割，則每一塊的體積$dV = \pi r^2 dz$由於每個切面皆為圓形，故質心位置皆在中心點，所以我們可沿著中心線位置向上積分

$$\therefore z_{CM} = \frac{1}{V}\int_0^h z dV = \frac{1}{V}\int_0^h z\pi r^2 dz$$

在 z=0 時，r=88m；在 z=40 時，r=16m。所以我們有

$$r = 88 - \frac{88-16}{40} z = 88 - 1.8z$$

$$\therefore z_{CM} = \frac{1}{V}\int_0^{40} z\rho(88-1.8z)^2 dz = \frac{\rho}{4.09\times 10^5}\left[\frac{(1.8z)^2 z^2}{4} - \frac{z^2 \times 88 \times 1.8z}{3} + \frac{z^2 \times 88^2}{2}\right]_0^{40}$$

$$\Rightarrow z_{Cm} = 12.37m$$

由質心的定義，我們有

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \frac{d^2(M\mathbf{R})}{dt^2} = M\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = Ma_{CM}$$

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{d(M\mathbf{R})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}_{CM}}{dt} \Rightarrow M\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{p}_{CM} = \sum_i \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{tot}$$

若此系統不受任何外力作用時，總動量守恆，也就是質心動量為一常數。因此，如果我們將質心當作座標系的參考原點時，質心位置不變，且質心動量（總動量）將為零。

例題十一：一火箭垂直發射升空後，於高度 1000m，**速度** 300m/s **時火箭主體與其配備的兩個燃料槽爆裂分離。假設此三個物體質量相等，其中火箭主體繼續以** 450m/s **的速度升空，一燃料槽以** 240m/ss **的速度向東飛出，問另一個燃料槽的速度為何？**

由動量守恆$\mathbf{p}_i = M\mathbf{v}_i = \mathbf{p}_f = \sum_j m_j \mathbf{v}_{jf}$

$$\Rightarrow M(300\mathbf{j})m/s = \frac{M}{3}(450\mathbf{j})m/s + \frac{M}{3}(240\mathbf{i})m/s + \frac{M}{3}\mathbf{v}_f$$

$$\therefore \mathbf{v}_f = (-240\mathbf{i})m/s + (450\mathbf{j})m/s$$

例題十二：二物體之間以一彈簧相連接，若將此二物體拉開自靜止狀態放手，問每個物體會擁有多少比例的動能？

由於質心速度於放手前後皆為零（動量守恆），故

$$m_1v_1 + m_2v_2 = 0 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = -\frac{m_2}{m_1}$$

將此結果帶入動能比可得

$$frac_1 = \frac{K_1}{K_1+K_2} = \frac{\frac{1}{2}m_1v_1^2}{\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2} = \frac{m_2}{m_1+m_2}$$

$$frac_2 = \frac{K_2}{K_1+K_2} = \frac{\frac{1}{2}m_2v_2^2}{\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}$$

4.5 質量變異系統（火箭）

火箭的推進原理主要源於動量守恆。推進燃料於火箭引擎中燃燒後以高速被拋離火箭，而火箭因此得到動量往前推進。然而在此噴射過程中，火箭也因燃料的損耗而改變原有的質量。考慮於時間 t 火箭加燃料的質量為 $M+\Delta m$，以速度 v 行進。於時間Δt 之後，火箭以相對於本身為 v_e的速度，將燃料Δm 拋出後，火箭的速度變為 $v+\Delta v$。由於此過程中無外力的介入，故由動量守恆得

$$(M+\Delta m)v = M(v+\Delta v) + \Delta m(v-v_e)$$

$$\therefore M\Delta v = \Delta m v_e \xrightarrow{\Delta t \to 0} M dv = v_e dm = -v_e dM$$

$$\Rightarrow \int dv = -v_e \int \frac{dM}{M} \quad \Rightarrow \quad v_f - v_i = v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$$

例題十三：一火箭於太空中行進速度相對於地球為$3.0\times10^3 m/s$。當其啟動引擎時，燃料燃燒後以相對於火箭$5.0\times10^3 m/s$的速度被拋出。當火箭加燃料的質量只剩啟動前的一半時，其相對於地球的速度為何？

由$v_f = v_i + v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$**可算得**$v_f = 6.5\times10^3 m/s$

若火箭以每秒燃燒五十公斤的速率燃燒燃料，則其推進力(thrust)**為**

$$Thrust = M\frac{dv}{dt} = \left|v_e \frac{dM}{dt}\right| = (5.0\times10^3 m/s)(50kg/s) = 2.5\times10^5 N$$

例題十四：消防隊需以 600N **的力支撐，方能穩定一正在噴水的消防水管。若水管出水量為** 3600L/min，**請估計噴水的速度？**

$$Thrust = 600N = \left|v_e \frac{dM}{dt}\right| \Rightarrow v_e = 10m/s$$