交流電路(Alternating-Current Circuits)

- 交流訊號的表示方法---相子(phasor)
- 阻抗的定義與計算
- KCL與KVL
- 交流訊號的功率
- *RLC*共振電路與受迫振盪子

交流訊號的表示方法---相子(phasor)

交流（alternating-current, AC)訊號是指會隨時間改變的訊號，一般都是週期性訊號。由前面討論過的傅立葉理論，任何週期性訊號都可以寫成不同頻率的弦波(sinusoidal)訊號的線性組合。因此在討論交流電路時，都只討論單一頻率的訊號，假如真的有兩個以上頻率的訊號，只要分開討論，把結果線性疊加即可。

普通的週期訊號可以寫為（以電壓訊號為例）

$$u(t) = V_0 \cos(wt + f)$$

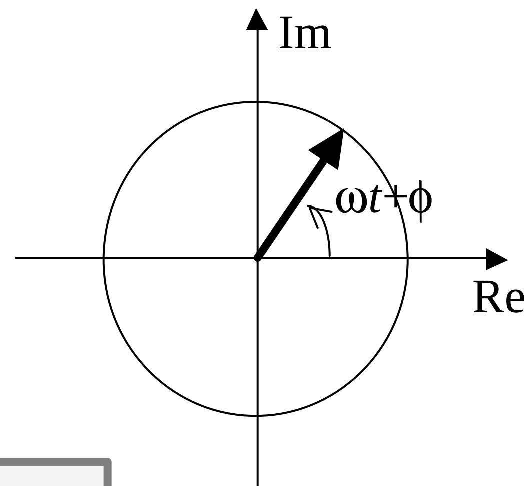
相位φ和時間零點的選擇有關
（這裡我們選擇餘弦函數。有些課本用正弦函數，以後難以推廣。）

這個訊號可以看成一複數訊號的實部(real part)**，即**

$$u(t) = V_0 \cos(wt + f) = \mathrm{Re}[V_0 e^{jwt + jf}] \qquad j = \sqrt{-1}$$

在複數空間，真實的訊號是複數訊號在實軸的投影，而複數訊號是一個逆時針方向旋轉的向量，旋轉的角速度為ω**，及真實訊號的角頻率。**

在討論大部分的AC**電路時，我們一次只討論一個頻率的訊號，因此所有電路中的訊號，包括電壓及電流訊號都有一樣的頻率，即他們在複數空間中都有一樣的旋轉角速度，只有相位可能不同而已。方便起見，便把複數訊號共同的部分**$e^{j\omega t}$**省略。要由複數訊號求回真實訊號時再乘回去。我們把省略調角速度的簡化複數訊號稱為相子**(phasor)**，講義中用粗體字表示，和向量相同。**



$$\mathbf{V} = V_0 e^{jf}$$

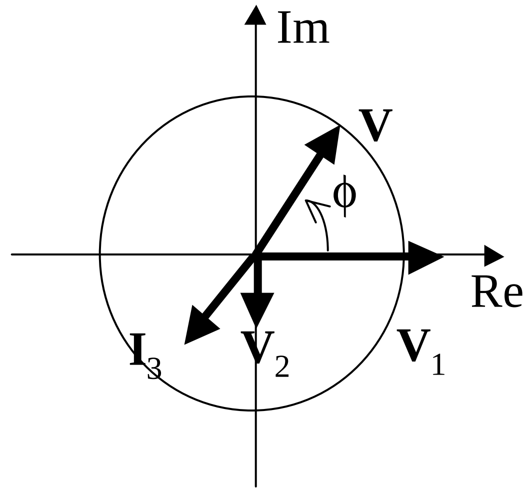
$$u(t) = \mathrm{Re}[\mathbf{V} e^{jwt}] = V_0 \cos(wt + f)$$

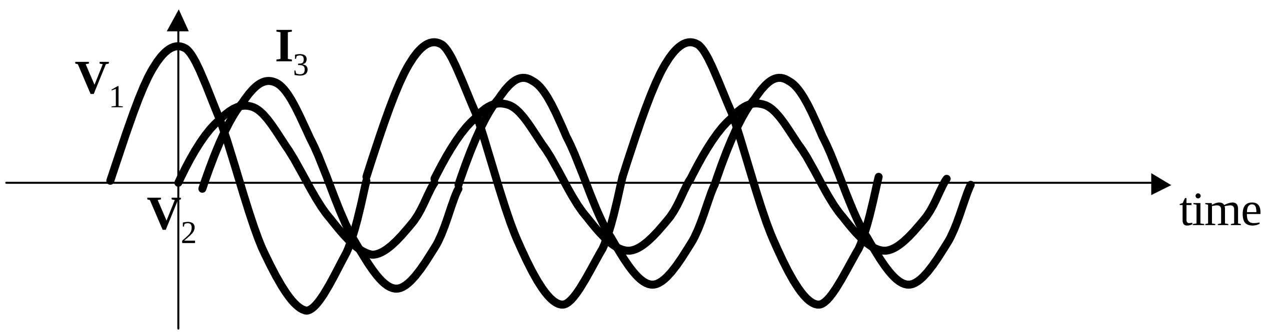
由於去掉了角頻率部分，相子在複數空間中只是固定方向的向量，他和實軸的角度即訊號之相位（或向角），向量的大小即訊號的振幅。

例題 **畫出下列訊號之相子**

$$u_1 = V_1 \cos wt$$
$$u_2 = V_2 \sin wt$$
$$i_3 = I_3 \cos(wt + \frac{5p}{4})$$

$$\mathbf{V}_1 = V_1$$
$$\mathbf{V}_2 = V_2 e^{j\frac{3p}{2}} = -jV_2$$
$$\mathbf{I}_3 = I_3 e^{j\frac{5p}{4}}$$





V_1比V_2領先$\pi/2$**，** **V_1比I_3領先**$3\pi/4$。**或** **V_1比V_2落後**$3\pi/2$**，** **V_1比I_3落後**$5\pi/4$。

訊號的相加

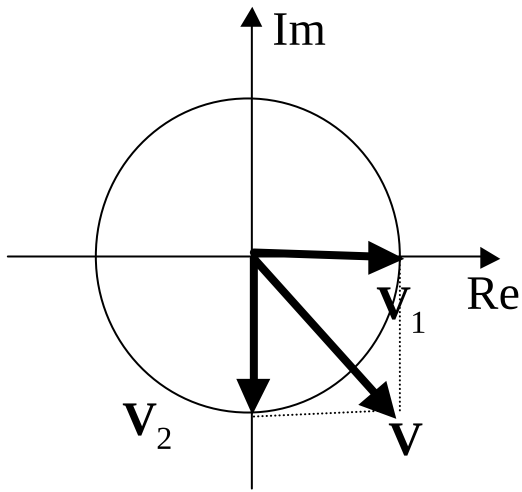
相同單位的訊號可以相加減，方法是將他們的相子依向量加法在複數空間中相加，結果再取實部即得真實訊號。

例題

計算 $u(t) = 2\cos wt + 2\sin wt$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = 2 - 2j = 2\sqrt{2}\left(\frac{1-j}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}e^{-j\frac{p}{4}}$$

$$u(t) = \mathrm{Re}[\mathbf{V}e^{jwt}] = 2\sqrt{2}\cos\left(wt - j\frac{p}{4}\right)$$

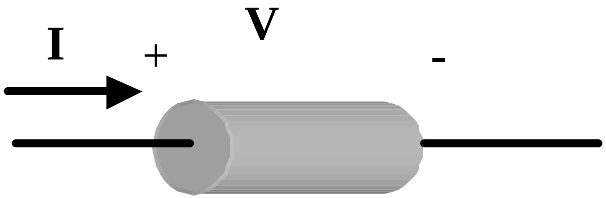


Phasor **的另一個寫法：** $\boxed{\mathbf{V} = V_0 e^{jf} \equiv V_0 \angle f}$

阻抗的定義與計算

任何一線性的兩腳元件，他的端電壓和流過的電流均以相子表示，其比例就稱為該元件的阻抗，阻抗可以是頻率的函數。當阻抗是複數時，表示電流和電壓訊號有相位差。

$$\boxed{\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}}}$$



電阻

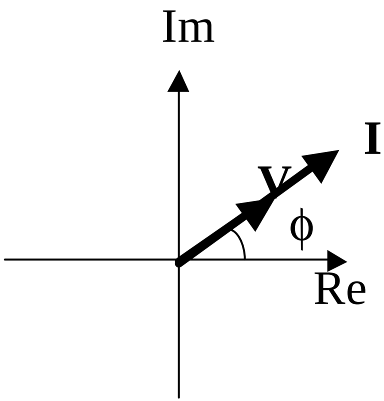
$$u(t) = i(t)R$$

$$V_0 \cos(wt + f) = I_0 \cos(wt + f)R$$

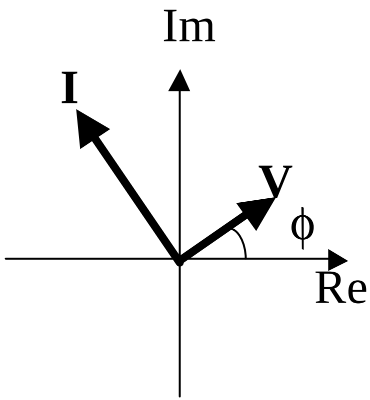
$$V_0 e^{jf} e^{jwt} = I_0 e^{jf} e^{jwt} R \qquad V_0 e^{jf} = I_0 e^{jf} R$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}R$$

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = R$$



電容



$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt} \qquad u(t) = V_0\cos(wt+f) \rightarrow \mathbf{V} = V_0 e^{jf}$$

$$i(t) = -wCV_0\sin(wt+f) \rightarrow \mathbf{I} = jwCV_0e^{jf} = jwC\mathbf{V}$$

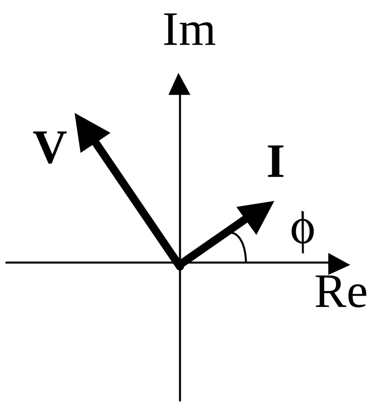
$$i(t) = \mathrm{Re}\left[e^{jp}wCV_0e^{jf}e^{jwt}e^{-\frac{jp}{2}}\right]$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}\mathbf{Z}_C$$

$$\mathbf{Z}_C = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{1}{jwC}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{Z}_C &= \frac{1}{jwC}\\ X_C &\equiv \frac{1}{wC}\end{aligned}}$$

電感



$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} \qquad i(t) = I_0\cos(wt+f) \rightarrow \mathbf{I} = I_0e^{jf}$$

$$u(t) = -wLI_0\sin(wt+f) \rightarrow \mathbf{V} = jwLI_0e^{jf} = jwL\mathbf{I}$$

$$u(t) = \mathrm{Re}\left[e^{jp}wLI_0e^{jf}e^{jwt}e^{-\frac{jp}{2}}\right]$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}\mathbf{Z}_L$$

$$\mathbf{Z}_L = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = jwL$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{Z}_L &= jwL\\ X_L &= wL\end{aligned}}$$

*X*稱做電抗
(reactance)

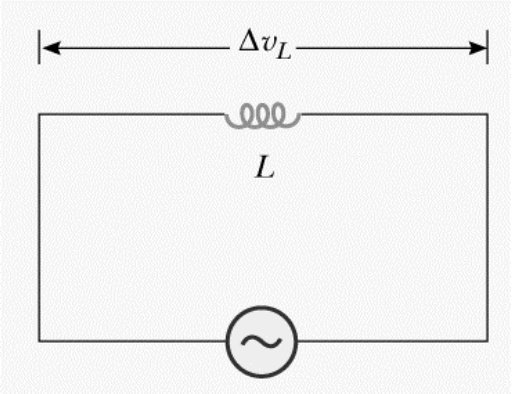
當某一雙腳元件的端電壓和電流有相位差，即阻抗為一複數時，即表示此元件中含有電容或電感的電抗。

當電阻、電容或電感串聯時，電流相同，總電壓為個元件電壓之向量和（複數空間）。當電阻、電容或電感並聯時，電壓相同，總電流為個元件電流之向量和。

電阻、電容或電感串聯或並聯後之等效阻抗計算，和電阻之串聯或並聯算法相同，只要將實數的電阻換為複數的阻抗即可。

例題

右圖電路中，電感為10 mH**，電壓源為** 14cos(2π×60*t*) V**，時間***t***以**s**為單位。計算電感中的電流。**



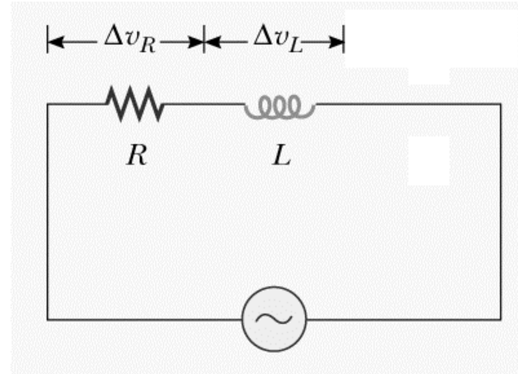
$$\mathbf{Z}_L = jX_L = jwL = j2p \cdot 60 \cdot 10\times 10^{-3} = j3.77$$

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{I}_L\mathbf{Z}_L = jX_L\mathbf{I}_L = j3.77$$

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_L}{\mathbf{Z}_L} = \frac{14}{j3.77} = -j3.71$$

$$i_L = 3.71\cos(2p \cdot 60t - \frac{p}{2})$$ (A)

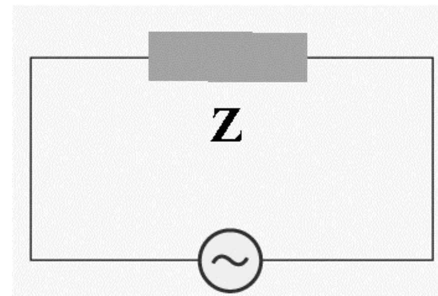
例題 上題中，若電路中再串聯一2Ω的電阻，則電流為何？電阻及電感上之電壓各為何？



$$\mathbf{Z} = R + jwL$$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{V}}{R + jwL}$$

$$\mathbf{I} = \frac{V_0}{R + jwL} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + w^2 L^2}} e^{-jf}$$

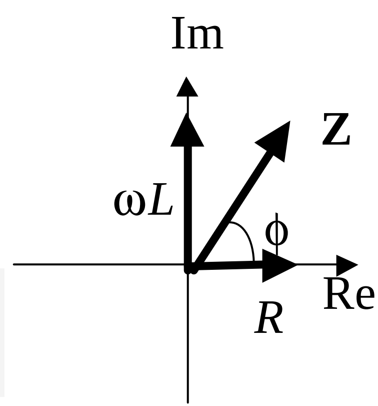


相位ϕ可由右圖看出

$$f = \tan^{-1}\frac{wL}{R} = \tan^{-1}\frac{X_L}{R}$$

$$\mathbf{V}_R = \mathbf{I}R = \frac{V_0 R}{R + jwL} = \frac{V_0 R}{\sqrt{R^2 + w^2 L^2}} e^{-jf}$$

$$\mathbf{V}_L = jwL\mathbf{I} = \frac{jwLV_0}{R + jwL} = \frac{X_L V_0}{\sqrt{R^2 + w^2 L^2}} e^{j\frac{p}{2} - jf}$$



數字代入

$$\mathbf{I} = \frac{14}{\sqrt{2^2 + 3.77^2}} e^{-jf} = 4.27 e^{-jf}$$

$$f = \tan^{-1}\frac{3.77}{2} = 1.083\text{rad} = 62^\circ$$

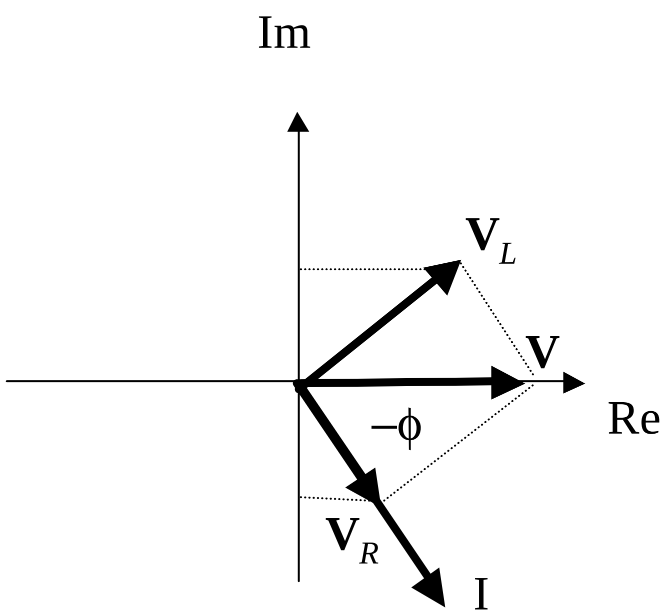
$$i = 4.27\cos(2p \cdot 60t - 1.08)\ \text{A}$$

$$\mathbf{V}_R = \mathbf{I}R = 2 \times 4.27 e^{-jf} = 8.54 e^{-jf}$$

$$\Delta u_R = 8.54\cos(2p \cdot 60t - 1.08)\ \text{V}$$

$$\mathbf{V}_L = jX_L\mathbf{I} = j3.77 \times 4.27 e^{-jf} = 16.1 e^{j(\frac{p}{2} - f)}$$

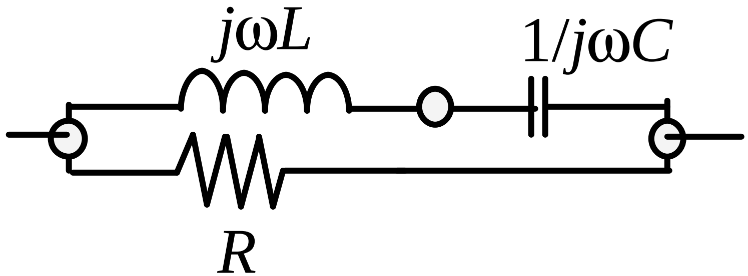
$$\Delta u_L = 16.1\cos(2p \cdot 60t + \frac{p}{2} - 1.08)\ \text{V}$$
$$= 16.1\cos(2p \cdot 60t + 0.49)\ \text{V}$$



例題

$$\mathbf{Z} = (jwL + \frac{1}{jwC}) // R$$

$$= \frac{(jwL + \frac{1}{jwC})R}{(jwL + \frac{1}{jwC}) + R}$$



KCL與KVL

克希荷夫電流定律(KCL)　Node Rule　Junction Rule

進入任一節點之電流和(**複數和**)**必等於流出該節點之電流和**(**複數和**) **。**

克希荷夫電壓定律(KVL)

Loop Rule

沿任一封閉迴路之電位變化總和(**複數和**)**為零。**

注意：AC**電路一次只分析一個頻率的訊號，且頻率是給定的。**